Anton Dumitriu

ESEURI

ŞTIINŢĂ ŞI CUNOAŞTERE
ALÉTHEIA
CARTEA ÎNTÎLNIRILOR ADMIRABILE





Editura Eminescu

Anton Dumitriu

ESEURI

ȘTIINȚĂ ȘI CUNOAȘTERE • ALÉTHEIA •
CARTEA ÎNTÎLNIRILOR ADMIRABILE

1986

Editura Eminescu

BUCUREȘTI, PIAȚA SCÎNTEII 1

Prefață

Am reunit în acest volum o parte din studiile pe care le-am publicat în diverse reviste din țară, precum și în unele reviste străine. Ordinea în care le-am așezat aici a fost aceea cronologică, pentru că mi s-a părut cea mai firească. Această ordine ar putea să sugereze și modul cum s-au cristalizat unele idei de-a lungul timpului și evoluția lor în cercetările ce am făcut.

Cîteva din problemele cercetate sînt reluate și reapar ca un fond comun al unora din aceste articole, dar abordarea și tratarea lor prezintă de fiecare dată aspecte diferite. Față de forma apărută în reviste, cartea cuprinde unele deosebiri, care — pe lîngă mici completări sau clarificări — sînt datorate, în majoritatea lor, eliminării repetițiilor și necesității, prin aceasta, de a reface continuitatea textului, așa încît acele elemente care se mai repetă țin doar de enunțul problemei.

Cititorul acestei cărți va lua contact cu unele dintre cele mai mari realizări ale științei contemporane, dar, în același timp, el va afla că marile și fascinantele cuceriri ale științei ridică probleme extrem de delicate, atît din punct de vedere logic, cît și filosofic. Știința nu este un dat, ci se face în mod continuu. Adevărurile științifice sînt dogmatice numai pentru cine le privește din afara științei. Mai mult încă, adevărurile obținute de știință apar foarte des ca fiind datorate unui travaliu mult mai amplu decît acela explicitat în demersurile noastre experimentale sau teoretice. De unde nevoia de a le înțelege pe deplin, înțelegere care a concentrat eforturile multor gînditori contemporani.

În aceste eforturi de înțelegere a enigmelor relevate de înseși succesele științei se înscriu și studiile noastre.

Am dat titlul Știință și cunoaștere *acestei lucrări în amintirea grupării cu acest nume, pe care am format-o în preajma războiului cîțiva prieteni și colegi, toți de formație științifică : Gr. C. Moisil, Al. Mironescu, Mihail Niculcea, Ion Biberi, Ion Zugrăvescu și cu mine. Activitatea noastră s-a manifestat prin cicluri de conferințe anuale la „Fundația Universitară". Au mai ținut conferințe în cadrul acestor cicluri profesorii : Simion Stoilov, Eugen Angelescu, Miron Nicolescu, N. Teodorescu și C. Noica.*

Ideea centrală, care stătea la baza temelor tratate, era tocmai ceea ce am arătat mai înainte, că în drumul științei spre succesele ei impresionante, la care asistăm zi cu zi, se ivesc uneori noi probleme științifice, filosofice și logice, care nu sînt de mică importanță și se cer să fie soluționate. Acum, la aproape jumătate de veac de la întemeierea acelei grupări, îmi dau seama că punctul nostru de vedere este valabil și astăzi. Știința pe care o practicăm este ea însăși o mare problemă.

A.D.

BIBLIOTECA DE FILOLOGIE

Asupra principiului incertitudinii

I

Se știe că materia și radiația prezintă o dualitate în natura lor, deoarece se comportă în experiențe cîteodată ca avînd un caracter ondulatoriu, și altă dată ca avînd un caracter corpuscular. Experiențele lui Wilson, Debye și Scherer asupra difracției electromagnetice, sau acelea ale lui Compton-Simon au fost decisive în această direcție. Acest dualism a fost pus în lumină de Albert Einstein, în ceea ce privește fenomenele de radiație, și de Louis de Broglie pentru materie.

Se poate stabili celebrul principiu al incertidudinii, de care voim să vorbim în acest articol, fie plecînd de la reprezentarea ondulatorie, fie plecînd de la aceea corpusculară. În cartea sa *La Physique nouvelle et les quanta*, Louis de Broglie stabilește propoziția lui Heisenberg într-un mod elementar, luînd ca punct de plecare reprezentarea ondulatorie.[1] Ne vom sprijini pe concepția corpusculară. Mai întîi vom observa — și prin aceasta vom familiariza cititorul cu modul nostru de a gîndi — că unde și corpuscule nu sînt decît imagini aproximative, pe care intuiția noastră ni le oferă despre lumea enigmatică care se agită în domeniul subatomic. Cum spune Heisenberg: „Este clar că materia nu poate fi în același timp și undă și corpuscul; aceste două concepții sînt prea diferite. Dificultatea se rezolvă dacă aceste două imagini nu sînt considerate decît ca analogii care sînt uneori valabile alteori eronate. Într-adevăr, experiența arată că electronii se comportă în unele împrejurări ca niște corpuscule, dar ea nu dovedește în nici un fel că ei posedă toate atributele corpusculelor. Se poate spune exact același lucru, *mutatis mutandis*, și în ceea ce privește undele. Aceste două reprezentări nu au decît valoarea unor analogii, corecte numai în cazuri-limită. Ansamblul fenomenelor atomice nu este imediat descriptibil în limbajul nostru."[2]

Trebuie să facem aici o rezervă esențială. Heisenberg pleacă, pentru a stabili relațiile de incertitudine, o dată de la concepția ondulatorie, și altă dată de la concepția corpusculară (relația de incertitudine se stabilește în ambele cazuri). El pleacă, după propriile lui cuvinte, de la simple analogii „care sînt uneori valabile, alteori eronate". În felul acesta rezultatele obținute vor fi atinse de viciul acestor analogii și nu vor putea fi considerate

[1] Nu putem face aici expunerea matematică a acestei teorii, care se găsește în cartea lui Werner Heisenberg (trad. franc.): *Les Principes physiques de la théorie des quanta* (Ed. Gauthiers-Villars, Paris, 1932).

[2] W. Heisenberg, *op. cit.*, p. 7.

decît prin prisma acestor erori. Cu alte cuvinte, teoria incertitudinii nu este decît un rezultat al defectuozității analogiilor, și nu-i o insuficiență necesară a cunoștințelor noastre. Ea este o consecință a modului cum *imaginăm* lumea microfizică și nu a modului cum *o cunoaștem* prin investigațiile noastre.

Principiul incertitudinii nu rezultă, astfel, din experiențele noastre, ca o concluzie matematică, ci se explică prin nevoia pe care o avem de a obține o intuiție a lumii microfizice. Cum plecăm de la imagini imperfecte, este clar că ele vor rămîne incomplete de-a lungul raționamentelor noastre, și orice formulă care se referă la ele va trebui să ilustreze într-un fel sau în altul acest defect. Mai mult, se va putea spera că într-o zi informațiile noastre despre lumea atomică vor deveni mai complete și că analogiile noastre vor fi mai bune. Atunci vom avea o altă intuiție a acestor entități subatomice, premisele noastre vor fi diferite și principiul incertitudinii își va fi sfîrșit cariera.

II

Dar ce este principiul incertitudinii?

Să presupunem *grosso modo* că vrem să determinăm, cu cea mai mare precizie, poziția și viteza unui electron, pe care-l considerăm că este un corpuscul. Să presupunem încă, pentru o mai mare simplificare, că poziția acestui electron este determinată de o singură coordonată x, care va măsura distanța de la o origine fixă (cazul în care electronul s-ar mișca în linie dreaptă). În acest scop va trebui să reperăm electronul cu ajutorul unui microscop, cu o mare putere separatorie. Bineînțeles, această putere separatorie este limitată, și nu se va putea cunoaște coordonata x decît cu o eroare Δx. Această eroare va putea fi micșorată, dar nu va putea fi niciodată eliminată, din cauza puterii limitate a microscopului. Pentru a avea o poziție mai bună pentru electron, adică pentru a diminua eroarea Δx, avem două posibilități: 1) să utilizăm un aparat cu o mai mare putere separatorie (dar care rămîne totdeauna limitată); 2) să utilizăm raze de lumină mai puternice decît lumina obișnuită, cum sînt razele ultraviolete, razele X sau razele γ ale radiului etc. Aceste raze sînt, ele însele, constituite din corpuscule, din fotoni, care transportă o energie mai mare. Electronul va putea fi văzut dacă este atins de cel puțin unul din fotonii razei incidente, care va trebui să fie difractat de electron, și apoi să parvină la ochiul observatorului. O asemenea întîlnire între electron și foton este analogă cu un șoc mecanic, după cum au arătat experiențele lui Compton. Urmează că acest șoc va perturba poziția electronului, cu atît mai mult cu cît sursa luminoasă va fi mai puternică, adică cu cît energia transportată de fotoni va fi mai puternică.

Pe scurt, cu cît se încearcă să se amelioreze condițiile observației, cu atît se perturbă situația electronului.

Este evident că șocul va perturba, de asemenea, viteza electronului (de fapt, impulsul sau cantitatea de mișcare, produsul vitezei prin masă). Analiza lui Heisenberg demonstrează că nu se poate niciodată cunoaște poziția și viteza electronului în mod exact, și că tentativele de a cunoaște aceste două mărimi în același timp nu reușesc decît să micșoreze cunoașterea lor.

Am notat prin Δx eroarea comisă în determinarea poziției electronului; să desemnăm prin Δp eroarea comisă în determinarea impulsului. Heisen-

berg stabilește că aceste două erori nu sînt independente, ci că ele sînt legate printr-o relație, celebra relație de incertitudine:

$$\Delta x \, \Delta p \geqslant h,$$

unde h este constanta lui Planck. Această relație arată că cele două cantități Δx și Δp sînt invers proporționale; cu cît una este mai mică, cu atît cealaltă este mai mare. În modul acesta, dacă ajungem să determinăm poziția x a unui electron cu o mai mare precizie, mecanismul însuși al acestei determinări va perturba viteza sa și eroarea va fi mai mare. Este deci imposibil să determinăm în același timp poziția și viteza unui corpuscul cu precizie. Observatorul nu poate vedea decît una din fețele lucrurilor, cealaltă îi este ascunsă de poziția sa față de fenomene. „Observatorul — scrie Eddington — seamănă cu acel comic care are brațele pline de pachete; de fiecare dată cînd se pleacă să ridice pe unul, el scapă un altul."

Să insistăm numai asupra faptului că experiența nu mai este, în felul acesta, independentă de observator, care intervine în actul observației, și dacă nu își ia anumite precauții față de lucrul observat, acesta se deformează, ba poate să se distrugă. . .

Există o relație subiect-obiect care este pusă în lumină astăzi de teoriile fizice actuale. Această relație nu consistă dintr-o dependență psihologică, ci este de natură pur fizică, și este exprimată prin relațiile de incertitudine. Actul de observație „deformează" obiectul observat. Întrebarea este dacă în aceste condiții ne rămîne sau nu vreo speranță să ajungem la o cunoaștere exactă a realității fizice.

III

Toate acestea par foarte clare, dar numai la un examen superficial fiindcă există propoziții care par evidente, dar care sînt, în fond, propoziți vide de sens. Heisenberg însuși face această remarcă: „Trebuie să reamintim că limbajul uman permite formularea de propoziții din care nu se poate trage nici o consecință, care sînt, la drept vorbind, complet vide de substanță, cu toate că ele produc în imaginația noastră un fel de imagine. De exemplu, afirmația că poate exista alături de universul nostru un alt univers, neavînd prin natura lui nici o relație cu el, nu conduce la nici o consecință, dar face să se nască în mintea noastră un fel de imagine. Bineînțeles, o atare propoziție nu poate fi nici confirmată, nici infirmată. Trebuie să fim în mod deosebit circumspecți în întrebuințarea termenului *realitate*, căci el antrenează ușor afirmații de acest fel." [3]

Principiul lui Heisenberg pleacă de la faptul „evident" că noi nu cunoaștem poziția și impulsul (sau viteza) unui corpuscul decît cu erorile respective Δx și Δp. Dar pentru a vorbi de erori comise în evaluarea acestor mărimi trebuie să ne imaginăm că ele au o existență numerică determinată. Ce sens are afirmația că facem o eroare în determinarea unei mărimi încă nedeterminate? Mai precis, vorbind pur și simplu de erorile Δx și Δp, se presupune implicit că „în realitate" poziția și viteza electronului sînt perfect defi-

[3] W. Heisenbreg, *op. cit.*, p. 11.

nite. Cu alte cuvinte, ideile de Δx și Δp presupun în mod vag imaginea unei realități asemenea „lumii în sine" a lui Kant, în care vitezele și pozițiile ar exista într-un fel precis, deoarece ele nu sînt atinse de observațiile noastre perturbatoare. Acest univers „în sine" ar evolua în fața unui sistem de axe de coordonate, și numai intervenția observatorului l-ar deforma. Iată ipoteza implicită care s-a introdus în teoria incertitudinii.

Dar observațiile noastre nu sînt mai bune și nu ne dau un rezultat mai precis dacă ele se apropie de mărimi „în realitate" (ceea ce nu are sens), ci dacă ele ne permit previziuni mai exacte. Cum o spune Philipp Franck: „Vom fi procedat cu atît mai mare exactitate cu cît rezultatul experienței noastre ne va permite să prevedem evenimente viitoare mai numeroase" [4]. Ameliorarea unui sistem de observație nu se poate baza pe ideea de a ne apropia cît mai mult de elementele microfizice pentru a le face vizibile fără nici o deformare, așa cum ar fi în realitate, cum caută în fond Heisenberg cînd vrea să introducă o lumină mai puternică, un microscop mai bun etc., ci numai pe faptul că rezultatele verificărilor numerice obținute să fie mai conforme cu previziunile și experiențele ce se vor face. Invers, observațiile care ne permit previziuni mai exacte și mai numeroase sînt acelea care ne fac să cunoaștem mai bine natura lumii atomice. Nu putem spune: dacă am face cutare experiență am putea să cunoaștem mai bine lumea fizică, dar ea nu este eficace, fiindcă perturbă sistemul observat; această afirmație nu are sens științific. Noi trebuie să spunem: cutare experiențe *realizate* ne procură măsuri mai bune; deci ele ne dau cunoștințe fizice mai bune. Alte propoziții prin care se afirmă că există un domeniu interzis — oricare ar fi explicația ce i s-ar da — în care precizia noastră nu poate face nimic, adică un domeniu neverificabil, sînt propoziții aparente, fără nici un sens științific. Pe scurt, teoria lui Heisenberg arată că numai măsuri care nu caută să fie prea „precise" dau rezultate mai bune. Trebuie să conchidem de aici că tentativele de a căuta rezultate mai bune, dar irealizabile din cauza relațiilor de incertitudine, au un sens, și că există o limită a preciziei cunoașterii științifice? Nicidecum. Dimpotrivă, aceste tentative infructuoase ne demonstrează exclusiv că rezultatele obținute în felul acesta nu sînt bune și nimic mai mult. Cum să afirmăm că aveau calitatea să ne dea măsuri mai precise, cînd ele ne procură rezultate mai rele? Se judecă o observație sau o experiență după rezultate, și nu după intențiile noastre.

IV

Să continuăm analiza noastră. Nu cunoaștem sistemul observat decît prin observațiile noastre. Putem atunci să vorbim de o interacțiune între observator și obiectul observat? Aceasta s-ar reduce, în ultimă analiză logică, la a spune că există o interacțiune între observațiile noastre și sistemul observat. Pentru fizician, elementele Universului nu există decît dacă ele sînt observate și pot fi înregistrate ca atare. A spune că există un sistem observat și un sistem observator este un mod de a ne exprima care nu trebuie să ne ducă la un realism naiv. Nu este vorba de a nega sau de a afirma existența reali-

[4] Philipp Franck, *Le Principe de causalité et ses limites*, p. 219 (trad. franc., Ed. Flammarion, Paris, 1937).

tății obiective. Această problemă nu aparține fizicii și pentru fizică nu are sens. Dar un enunț fizic nu poate avea un conținut decît în forma următoare: „În cutare împrejurări date, cutare experiență este trăită de un subiect" [5]. Altfel vom enunța o judecată lipsită de sens fizic. Sistemul observat nu parvine imaculat în aparate, ci presupune o serie de alte observații prealabile. Există un viciu în chiar separarea dintre sistemul observat și sistemul observator fiindcă această distincție fundamentală — care este punctul de plecare al lui Heisenberg — se reduce, în fond, la o analiză a modului cum primim senzațiile noastre. De unde începe observatorul? De la organele sale senzoriale. Instrumentele nu sînt decît prelungiri ale simțurilor omului. Heisenberg însuși a sesizat gravitatea acestui fapt, dar, în loc de a renunța la punctul de plecare al teoriei sale, spune că „pentru a scăpa de această indeterminare (provocată de separarea în observat-observator) ar trebui să putem fi cuprinși în sistem pînă la ochi" [6]. Este clar că în această „separare" se introduc viziunea și interpretarea defectuoasă a teoriei incertitudinii. Faptul că lumea este observată de către fizician prin aparatul lui vizual și ar „deforma" obiectele, dîndu-le dimensiuni, forme, culori etc., nu poate forma un punct de vedere științific. Ochiul uman este și el un aparat optic și nu era nevoie de microscop de înaltă putere separatorie și de lumină mai puternică, cum sînt razele ultraviolete, razele X sau razele γ, pentru a ajunge la relațiile de incertitudine; ele pot fi obținute aplicînd ochiului uman, punct cu punct, teoria făcută de Heisenberg. Se va putea spune, de exemplu: din cauza puterii separatorii limitate, ochiul uman nu determină decît cu eroare dimensiunile și pozițiile; pentru a avea o determinare mai bună ar trebui să întrebuințăm o lumină mai puternică, dar care ar perturba sistemul observat, dacă acesta ar fi de ordinul de mărime al fotonilor razelor de lumină (cînd perturbația devine sensibilă) etc. Se vede că aceleași concluzii pot fi susținute chiar dacă se face o distincție numai între fizician pur și simplu, ca „sistem observator", și între sistemul observat. În teoria lui Heisenberg se neglijează ochiul observatorului, care, după acest mod de a vedea, modifică la fel lumea observabilă. Teoria incertitudinii se dezvoltă în raport cu acțiunea reciprocă dintre observator și obiectele observate, plecînd numai de la instrumentele care sînt prelungirile ochiului. În realitate, natura problemei nu s-a schimbat, deoarece instrumentele nu sînt de natură diferită față de ochi, ci numai niște ochi mai puternici. Astfel că problema se rezumă la aceeași întrebare: ochiul nostru deformează obiectele observate și cum?

Pentru a scăpa de această metafizică naivă trebuie să ținem seama că izolarea sistemului observabil este, în modul cum este făcută, complet fictivă. Schlick a pus această problemă în termeni foarte clari: „Trebuie să insistăm — scrie el — asupra acestui fapt, că impresia sensibilă izolată *(Erlebnis)*, invocată pentru controlul unei propoziții, nu trebuie să fie considerată, în general, ca izolată, ci că este vorba mai ales de regularități, de raporturi constante. Ultimele permit controluri veritabile și evită iluziile și halucinațiile." [7]

Ce se întîmplă cînd ni se vorbește de un sistem observat? Acest sistem, care evoluează în fața unui sistem de axe de coordonate, a trecut deja prin diferite observații, nu sîntem în prezența unui teren virgin, ci în fața unui

[5] Moritz Schlick, *Positivismus und Realismus* (*Erkenntnis*, 3 Bd, 1932).
[6] W. Heisenberg, *op. cit.*, p. 47–48.
[7] M. Schlick, *loc. cit.*

teren care a fost examinat în experiențele lui Compton, Frank, Herz etc., pînă cînd a ajuns în fața microscopului lui Heisenberg, pînă cînd a ajuns să ia această formă conceptualizată. Fizicianul nu poate deci vorbi de o „deformare" a acestui sistem, căci acesta nu poate fi cunoscut decît prin astfel de „deformări". Aceasta este tocmai experiența noastră din care se naște cunoașterea fizică. Pe scurt: *Dacă Heisenberg definește în mod izolat sistemul observat, el nu ține seamă de faptul că a ajuns la această conceptualizare numai în baza unor observații care l-au „deformat"; dacă el îl consideră în relațiile și raporturile sale constante, oferite de observație, atunci nu se mai poate vorbi de o perturbare a sistemului prin observații, deoarece prin astfel de observații sistemul poate fi definit.*

V

În sfîrșit, se poate considera principiul incertitudinii ca o expresie a limitei inferioare a investigațiilor științifice. Principiul lui Heisenberg arată că există o limită pentru puterea științei de a cunoaște lumea microfizică, dincolo de care nu poate pătrunde mai jos. Dar asemenea propoziții nu pot fi admise decît dacă se pleacă de la conceptul neștiințific că există o lume fizică „în sine", o lume „adevărată" neperturbată de nici un „ochi care să o vadă și de nici o minte care să o înțeleagă"... „A accepta că știința are limite — scrie Philipp Frank — revine la a recunoaște existența unor cunoașteri extra-științifice."[8] Cine spune că știința are limite afirmă, în același timp, că există și o lume „necunoscută". Dar, după cum s-a văzut, pentru fizician ideea de „realitate", situată „dincolo" de ceea ce este observație și experiență, este fără interes.

Analiza noastră arată că Heisenberg ca și ceilalți fizicieni, plecînd de la erorile Δx și Δp ale poziției și vitezei (impulsului) unui electron făcute prin observații față de poziția x și impulsul p, pe care le-ar avea electronul „în realitate", nu au putut scăpa unei „lumi imaginate" care ar dubla fenomenele și observarea lor, și care a dat loc la întreagă această teorie.

Scientia, vol. 11–12, Milano, 1940.

[8] Philipp Franck, *op. cit.*, p. 253.

Hazard și știință

I

Ce este hazardul? Poincaré își începea studiul său binecunoscut despre hazard printr-o întrebare, citîndu-l pe matematicianul Bertrand.[1] Într-adevăr, nu este o contradicție să vorbim despre legile hazardului? „Hazardul nu este antiteza oricărei legi?!", scria Bertrand [2]. Întîlnim aceeași dificultate încercînd să regăsim o definiție a hazardului, cu toate că chiar Bertrand scria: „Cuvîntul hazard, inteligibil în sine, deșteaptă în mintea noastră o idee perfect clară". O definiție a hazardului ar fi pe cît de riscată, tot atît de inexactă. O judecată care exprimă o definiție este *apophantică*, ea „luminează"; dar cum să luminezi ceea ce este obscuritate? Cum să atribui hazardului o proprietate — cum face o definiție, în general —, cînd el înseamnă absența oricărei proprietăți? Hazardul ar însemna imprevizibilul declanșat orbește; este oare posibil să găsim o caracteristică comună pentru evenimentele imprevizibile?

Să privim problema dintr-un alt punct de vedere: să considerăm un univers în care ar domni un determinism riguros, unde totul s-ar petrece în virtutea unor legi inexorabile. Faimoasa inteligență a lui Laplace s-ar afla acolo la ea acasă. „O inteligență care, la un moment dat, ar cunoaște toate forțele care animă natura și situația respectivă a ființelor care o compun, dacă, pe de altă parte, ar fi destul de vastă pentru a supune aceste date analizei, ar îmbrățișa în aceeași formulă mișcările celor mai mari corpuri ale universului ca și acelea ale celui mai ușor atom: nimic nu ar fi incert pentru ea, și viitorul, ca și trecutul, ar fi prezent în ochii ei."[3] Curba evoluției ignoranței umane ar uni două puncte: la una din extremități s-ar găsi ființa bizară a lui Laplace, care ar ști totul; la cealaltă, ignorantul absolut care nu știe nimic. De o parte determinismul riguros, de cealaltă hazardul. . .

Este evident, pentru oricine, că prin aceste considerații n-am spus mare lucru despre hazard și că el rămîne mai departe învăluit în misterul lui. Dar spiritul omenesc are bizareriile lui: el vrea să știe ce este o lume în care nu există nici o lege; după ce reguli ar evolua evenimentele acolo unde nu există nici o regulă. În fond, nu putem scăpa acestei exigențe a imaginației noastre, care vrea să existe ceva organizat dedesubtul a ceea ce este presupus fără nici o ordine. De aceea, un savant căruia i s-ar pune această problemă ar

[1] H. Poincaré, *Science et méthode* (Flammarion, Paris, 1909).
[2] J. Bertrand, *Calcul des probabilités* (Paris, 1889).
[3] P. S. Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités* (Paris, 1814).

răspunde: „Nu cunosc toate cauzele și toate forțele care lucrează în acest moment în Univers, astfel că ceea ce îmi apare acum ca un fapt fortuit este datorat ignoranței mele". Hazard și ignoranță ar avea, astfel, aceeași semnificație.

Trebuie să observăm că o astfel de concepție atribuie noțiunii de hazard un conținut subiectiv. Ordinea din natură ar exista și ar fi garantată de credință și nu de cunoaștere; dezordinea ar fi ignoranța acestei ordini preexistente. În felul acesta Louis Bachelier ar putea spune, pe bună dreptate, că nu se poate defini în mod corect hazardul „pentru motivul că în realitate hazardul nu există" [4]. Dar nici H. Poincaré nu era de acord cu o astfel de concepție: „Trebuie deci, într-adevăr, ca hazardul să fie altceva decît numele pe care-l dăm ignoranței noastre, că printre fenomenele ale căror cauze le ignorăm trebuie să distingem fenomenele fortuite, asupra cărora nu putem spune nimic atît timp cît nu vom fi determinat legile care le guvernează" [5].

Revenim astfel la prima noastră întrebare: ce este hazardul?

II

Înainte de a merge mai departe, să examinăm, sumar de altfel, modul cum oamenii de știință concep hazardul. Aceștia l-au făcut prizonierul cîtorva formule, l-au înlănțuit în ecuații, astfel că au putut pretinde — în mod paradoxal — că au stabilit legile hazardului. Am văzut că acest paradox a frapat pe savanți. Este un rezultat al curiozității nepotolite a spiritului omenesc de a voi să calculeze necunoscutul. Ar fi de ajuns să calculăm și în vid pentru a conchide că am atins un rezultat material. Astfel, un savant francez afirma că calculul tensorial cunoaște mai bine fizica decît fizicianul. Să presupunem, o dată cu Poincaré, că avem un con și, ca într-un simplu joc de copii, încercăm să-l facem să se țină în echilibru pe vîrful lui, în loc să-l așezăm normal pe baza lui. Echilibrul realizat va fi instabil: conul va cădea în mod sigur. Dar nu putem, în nici un fel, să prevedem în ce parte va cădea. Numai hazardul va decide. Am putea spune, urmărindu-l pe Poincaré, că dacă am avea un con perfect simetric, dacă nu ar exista trepidații, nici curenți de aer etc., corpul geometric ar rămîne fixat pe vîrful lui. „O cauză foarte mică, care ne scapă — scrie Poincaré — determină un efect considerabil și atunci spunem că efectul este datorat hazardului." Ajungem din nou la ignoranța noastră, care este reprezentată de noțiunea de hazard. Dar această denumire, am văzut, nu este suficientă, și în realitate nu spune nimic.

Să considerăm legea lui Bernoulli. Un enunț vulgar este următorul: cu timpul, adică într-un foarte mare număr de cazuri, evenimentele se produc aproape proporțional cu probabilitățile lor. Aceasta este faimoasa lege a numerelor mari. Să precizăm. Probabilitatea unui eveniment este raportul dintre numărul cazurilor favorabile și numărul tuturor cazurilor posibile. Dacă într-o urnă sînt 10 bile în total, dintre care 5 sînt negre și 5 sînt roșii, probabilitatea să scoatem din această urnă o bilă neagră este de 5/10 (5 cazuri favorabile și 10 cazuri posibile). Nu pot insista asupra arbitrariului unei atare definiții. Dar legea lui Bernoulli o presupune. În exemplul ales mai sus, probabilitatea sau șansa de a scoate o bilă neagră este de 5/10 sau 1/2; aceeaș

[4] L. Bachelier, *Le Jeu, la chance et le hazard* (Flammarion, Paris, 1926).
[5] H. Poincaré, *op. cit.*, p. 66.

șansă o are evenimentul contrar, de a scoate o bilă roșie, deoarece numărul bilelor negre și roșii este egal. Cu alte cuvinte, în mod matematic, ar trebui să scoatem succesiv o bilă neagră, o bilă roșie, și așa în continuare. Din nefericire, experiența nu ține seamă de calculul nostru și putem să ne găsim la un moment dat în situația de a fi scos una după alta 20 de bile roșii; de exemplu, Bernoulli a stabilit că într-un număr enorm de cazuri grupurile bilelor negre și acela al bilelor roșii extrase din urnă (pentru a ne referi la exemplul nostru) vor fi aproximativ egale. Dacă scoatem de 5 000 de ori cîte o bilă din urna noastră, aproximativ 2 500 dintre ele vor fi negre și aproximativ 2 500 vor fi roșii. În mod practic aceasta nu se întîmplă niciodată. Vom avea, putem presupune, 2 450 bile negre și 2 550 bile roșii, diferența de 50 puncte formînd un *écart*.

Desigur, este extraordinar să prevezi ce va decide hazardul, chiar într-un număr enorm de cazuri. Dar avem aici o lege a hazardului, o lege a ignoranței? În fond, știm care sînt șansele fiecărui eveniment. Aceasta este premisa noastră, punctul nostru de plecare. Ce spune legea numerelor mari? Ea afirmă că fiecare eveniment va avea loc după șansa lui și că toate evenimentele își vor păstra ritmul lor uniform. Să presupunem că avem 100 de cazuri și că negrele au ieșit de 90 de ori și roșiile numai de 10 ori. Acesta este un *écart*, dar legea lui Bernoulli ne va spune că nu avem un număr prea mare. Nimic nu împiedică să avem — în mod excepțional — de o parte o tragere de 800 de bile negre și de cealaltă numai 200 roșii (pentru un total de 1 000 de cazuri). Va trebui să mergem mai departe. Această lege nu face deci altceva decît să amîne echilibrul șanselor pînă cînd se realizează. Iată întreg secretul calculului nostru: se neglijează rezultatele nefavorabile și se consideră numai cazurile aproape exacte.

În rezumat, calculul probabilităților nu poate să enunțe nimic dincolo de ce s-a dat inițial, și posibilitățile de frecvențe sînt date de la început. Calculul urmărește aceste posibilități teoretice pînă la momentul cînd sînt realizate. Matematicianul este satisfăcut atunci. Calculul său a ieșit victorios. Dar, în același timp, această aritmetică a trebuit să fie infirmată într-un număr extraordinar de mare de cazuri pentru a nu fi confirmată decît o singură și unică dată. Să presupunem, în continuare, că am împins tragerile pînă la 5000 de bile și că frecvențele s-au echilibrat, obținînd 2 450 bile negre și 2 550 roșii — cu un *écart* minimum de 50 de puncte. Pînă la acest moment *écart*-urile au fost mai mari, anume în 4 999 de cazuri diferite.

De exemplu:

Negre	*Roșii*
2 500	2 300
2 501	2 300
2 502	2 300
2 502	2 301
	etc.

Această cantitate enormă de diferențe nu produce însă nici o impresie. E de ajuns să existe un moment în care numerele să fie aproape egale. Dar această posibilitate nu era exclusă de la început. Hazardul avea toate libertățile, dar avea, de asemenea, și o morală: el putea să provoace toate *écart*-urile, putea să realizeze orice număr de-o parte sau de cealaltă, dar fără să

evite numerele egale (sau aproape egale), căci atunci nu ar fi avut o libertate completă.

Să considerăm un matematician mai îndrăzneț; care și-ar propune să urmărească aceste trageri pînă va fi obținut — în ciuda calculului —de o parte 1/3 bile negre și de cealaltă 2/3 bile roșii. Ei bine, într-un număr extrem de mare de cazuri acest eveniment trebuie să se întîmple pentru că nimic nu se opune ca el să aibă loc! Legile hazardului se verifică pentru că ele verifică totul. . .

III

Aceste considerații ne conduc la două observații. Prima privește definiția hazardului ca ignoranță a modului real de producere a evenimentelor. Adesea savantul introduce o imagine salvatoare, care vrea să explice neputința gîndirii, dar care nu poate, în nici un caz, să o facă mai eficace. Uneori este foarte dificil să demaști iluzia pur verbală a unei astfel de experiențe, incapabilă să facă să avanseze cunoașterea noastră. Cea mai mare parte a acestui fel de explicație presupune că există o *realitate exterioară*, în afara experienței noastre, și că deformînd această realitate* prin însuși modul nostru de cunoaștere (simțuri, aparate care le prelungesc), ajungem la rezultate științifice. O atare viziune nu este științifică. Cunoașterea științifică pleacă de la date experimentale și toate conceptele și concepțiile pleacă de la experiență și sînt verificate de experiență și observație. Dacă toate propozițiile științifice veritabile sînt acelea „verificabile", atunci propoziția: „evenimentul observat în condiții date pare fortuit; în realitate el este determinat de legi proprii, dar încă necunoscute" nu corespunde condițiilor generale, enunțate mai sus, și nu este o propoziție științifică, fiindcă nu are ca justificare o experiență sau o observație. Scopul științei este de a observa faptele și de a formula, bazîndu-se pe ele, propoziții verificabile. Dar cum să verificăm propoziția: „fenomenul fortuit are legile sale și numai în aparență este datorat hazardului"?

Obiectul științei nu este o realitate mai „ascunsă", care scapă observației și experienței; o asemenea „realitate" nu poate fi atinsă, prin definiție, de investigațiile noastre. Schema cercetării științifice este următoarea:

1. Datele sensibile, obținute prin observație și experiență.
2. Înregistrarea unor regularități eventuale.
3. Verificarea și controlul continuu ale acestor date.
4. Formularea acestor regularități în forma unor legi.

În această schemă, ipoteza inițială, a unei realități inaccesibile, nu-și găsește un loc. Astfel, afirmația savantului că hazardul este ignoranța noastră este o pseudodefiniție, care ascunde imaginea neștiințifică a unei realități pe care o vede, dar în care nu pătrunde. Omul de știință nu poate face decît observații și experiențe; dacă poate observa regularități, atunci el formulează legi; dar dacă nu constată nici o regularitate, el trebuie să spună că are de-a face cu hazardul.

* Îl facem atent pe cititor că distingem cele două accepții ale conceptului de *realitate*, unul științific (la care ne referim noi) și altul filosofic.

Există, astfel, două posibilități de a formula teoretic observațiile noastre: există constante; nu există constante. Aceste două răspunsuri epuizează complet domeniul observației. Tot ce se afirmă în afara acestor propoziții este produsul imaginației.

IV

Ajungem acum la definiția pozitivă a hazardului, ceea ce va fi a doua remarcă a noastră. Am văzut că observația științifică se exprimă teoretic prin două eventualități: regularități și neregularități. Pentru ce am avea dreptul să spunem că, în cazul neregularităților, cunoaștem mai puțin bine, sau nu cunoaștem deloc mecanismul naturii? Nu introducem atunci, în mod tacit, o credință pseudoștiințifică, anume că știm ceva chiar atunci cînd nu știm nimic? Cele două constatări sînt echivalente: una nu este mai „bună" decît cealaltă. Dacă experiența ne informează că există legi pentru niște evenimente date, și dacă tot experiența ne arată că există fenomene care nu se supun nici unei legi, aceste două afirmații sînt expresia, bazată pe date sensibile și teoretice, a unor rezultate absolut egale în valoare din punct de vedere logic. Nu modul nostru de a încadra matematic faptele determină valoarea observațiilor experimentale, și mai ales nu faptul regularității lor le dă drept de cetate în știință. *Putem spune că a ajunge la concluzia că unele fapte sînt fortuite este tot atît de important pentru cunoaștere ca și a afla că ele sînt perfect determinate.*

Este adevărat că preferința noastră se îndreaptă spre fenomenele dominate de legități, pentru că este mult mai armonios un Univers condus de legi, în care totul, trecutul ca și viitorul ar fi înscrise în memoria ființei de care vorbea Laplace. Dar situația fizică a fenomenelor, ca și valoarea observațiilor lor nu depind de preferințele noastre. În fond, determinismul și indeterminismul naturii, certitudinea și hazardul în sine sînt indiferente; ceea ce este important este să cunoaștem comportamentul fizic efectiv. Ce este atunci hazardul? Nu ia el, oare, semnificația unei cunoștințe? Fie că evenimentele sînt determinate, fie că ele nu sînt, a afla sistematic acest lucru înseamnă a face știință, și a face știință înseamnă a dobîndi cunoștințe.

V

Concluziile noastre pot fi ilustrate. În fizica cuantică, particulele elementare nu mai sînt guvernate de legi rigide, ci de legi statistice, de probabilități. W. Heisenberg a arătat că în domeniul microfizic lumea nu mai este deterministă (în mod clasic) și previziunile noastre nu pot fi enunțate decît într-o formă probabilistică și în anume limite. Nu aș putea defini mai bine diferența care există între știința clasică și știința actuală, decît în modul cum a făcut-o Louis de Broglie[6]: „În lumina teoriilor cuantice, mecanica și fizica clasică apar, astfel, ca nefiind riguros exacte, dar inexactitatea lor este mascată, în condițiile obișnuite, de erori experimentale, așa că ele consti-

[6] Louis de Broglie, *La Physique nouvelle et les quanta* (Flammarion, Paris, 1937).

tuiesc pentru fenomenele la scara noastră aproximații excelente". Cu alte cuvinte, idealul lui Laplace, care pretindea să ne apropie de ființa fantastică care cunoștea totul, nu poate fi realizat decît prin inexactități. Veritabilele legi științifice sînt acele legi care țin seama de inexactitatea inerentă experienței umane, și care se exprimă prin probabilități. Să luăm un exemplu. Legile lui Kepler, care obligă planetele să se miște în jurul Soarelui descriind elipse, sînt expresia unei armonii perfecte. La scara la care facem observațiile, utilizînd numere foarte mari, erorile sînt mici și prin urmare neglijabile, și preciziunea destul de bună. Izolăm, astfel, sistemul Soare-planetă pentru a obține legea mișcării. Dar ar fi suficient să introducem acțiunea atracției unice a unei planete (sau a tuturor planetelor) asupra sistemului considerat, pentru a constata că această armonie nu este decît o iluzie care se bazează pe erorile comise. Astfel, în mecanica clasică, se comit inexactități pentru a se obține o concepție mai precisă și mai armonică despre lume. Cum procedează fizica actuală? Ea rezervă un loc și erorii în teoriile pe care le face: acestea sînt necunoscutele care figurează în ecuațiile omului de știință. Necunoscutul are funcția lui matematică în cunoașterea științifică a naturii. Legile probabilistice țin seama de această funcție: ele nu mai exprimă certitudini, ci, avînd un loc pentru orice eventualitate, ele reprezintă un Univers mai elastic, angajat într-un joc mai liber. În fond, calculul probabilităților guvernează lumea. Numai în cazuri-limită, cînd operăm cu numere astronomice, erorile sînt neglijabile și putem să ne imaginăm Universul supus exigenței clasice de armonie și de perfecție.

Dar dacă hazardul s-a insinuat în inima științelor contemporane, dacă legile științei clasice nu sînt decît cazuri particulare ale legilor mai generale probabilistice, nu este evident că cunoștințele procurate de știința clasică și cele oferite de știința actuală nu sînt de natură diferită, ci că reprezintă o cunoaștere de același ordin?

VI

Să conchidem. Am văzut că hazardul științific nu poate însemna ignoranță. Astfel, ne găsim în fața dilemei următoare. Dacă legile hazardului ne dau o cunoaștere de aceeași natură ca și aceea oferită de legile clasice ale științei, sau chiar mai amplă, atunci: sau, într-adevăr, „hazard-ignoranță" înseamnă cunoaștere științifică; sau „hazard-cunoaștere" înseamnă o știință ignorantă. Nu ne vom mai pune atunci întrebarea „ce este hazardul?", ci „ce este știința?", dar știința înțeleasă în cel mai larg sens al cuvîntului. Legile hazardului sînt legile universale, care, în cazuri extreme, iau forma clasică, și atunci erorile pot fi lăsate deoparte. Știința clasică formulează deci mai puțin precis ignoranța noastră. Barca sa va da totdeauna peste stîncile erorii și teoriile ei se vor modifica în mod indefinit. Știința actuală are meritul de a formula mai precis ignoranța noastră, adică ceea ce rămîne de cunoscut. Ea o prevede. De aceea ea are să se teamă mai puțin de infirmările experienței. Scopul științei nu poate fi, în ultima analiză, de a ne da cunoștințe definitive; dimpotrivă, el ar consta din organizarea demersului nostru, de a găsi limitele ignoranței, și, prin aceasta, mica noastră putere. Nu spunea Hegel că a cunoaște limitele cunoașterii înseamnă mai mult decît ar permite aceste limite? „Cunoașterea existenței unor asemenea limite —

scria el — cuprinde o contradicție, fiindcă, dacă știm ceva asupra acestor limite, aceasta înseamnă că le-am și depășit." Curios proces este acela al științei. Ea stabilește continuu cercul ignoranței noastre și îl mărește sau îl micșorează prin determinarea frontierelor ignoranței noastre. Iată cursul progresului veritabil al științei. Această depășire efectuată în fiecare moment de savanți reprezintă, în fond, adevăratul succes al științei. Astfel, nu doar faptul de a construi teorii fizice extraordinare contează și face să avanseze cunoașterea; ea progresează mai ales indirect, prin căderea teoriilor. Ruina lor, faptul că ele sînt găsite inexacte și că trebuie înlocuite este momentul progresului gîndirii. Cunoaștem atunci mai bine natura. Știința exemplifică astfel ceea ce se petrece în natură tot timpul: distruge, pentru a construi. Nu marile construcții, nu edificiile teoretice contează, ci funcția de a dărîma și a crea. În această funcție se revelează destinul dramatic al omenirii și, în același timp, puterea geniului uman.

Scientia, vol. 9—10, Milano, 1942

Paradoxele în Evul Mediu

I. INTRODUCERE

Logica Evului Mediu, considerată secole de-a rîndul drept un material fără nici o valoare decît aceea, ca să spunem așa, arheologică, a început în zilele noastre a fi studiată din nou. Interesul acordat în ultimul timp problemelor de logică de care s-au ocupat logicienii scolastici se datorește, în primul rînd, logicii moderne, logicii matematice, care a constatat că multe din rezultatele descoperite astăzi erau deja cunoscute de logica acestei epoci și chiar de logicienii școlii stoice. Într-adevăr, o mare parte, în orice caz partea esențială a logicii propozițiilor ipotetice — ceea ce numim astăzi teoria funcțiilor de adevăr sau calculul propozițiilor —, era bine cunoscută în Evul Mediu, chiar dacă socotim că această parte nu era decît moștenirea lăsată de Antichitatea stoică.

Una dintre problemele care au preocupat în cel mai înalt grad pe logicienii scolastici este problema sofismelor și, în strînsă legătură cu ea, problema pe care o numim astăzi „problema paradoxelor" sau a „antinomiilor logice".

Tratatele scolastice de logică urmează, în general, o împărțire pe cărți după o tradiție bine stabilită și, bineînțeles, toate conțin o carte despre sofisme.

În directă legătură cu problema generală a sofismelor apar două probleme noi:

1) Problema particulelor logico-gramaticale numite *syncategoremata* (sau *syncategoreumata*).

2) Problema unor paradoxe numite *insolubilia*.

Acestea ajung, cu vremea, probleme independente, cîștigîndu-și o importanță autonomă în raport cu alte sofisme, pentru că nu pot fi rezolvate numai prin regulile simple ale ultimei cărți a *Organon*-ului, *De sophisticis elenchis*.

Pe scurt, în nenumăratele tratate de logică ale Evului Mediu găsim trei capitole distincte asupra sofismelor care devin, pe măsura înaintării cercetărilor, tratate separate:

1. tratatul intitulat *Sophismata*, în care sînt repetate la infinit, cu variante neașteptate, problemele și clasificarea Stagiritului;

2. tratatul despre *Syncategoremata*, cuprinzînd probleme noi, care nu fuseseră examinate de Aristotel;

3. tratatul despre *Insolubilia*, unde sînt discutate unele paradoxe analoge celor logico-matematice descoperite în zilele noastre și în centrul cărora se găsea paradoxul mincinosului cu toate variantele lui.

Într-adevăr, celebrul tratat de logică al lui Petrus Hispanus (1226—1277), devenit mai tîrziu papa Ioan al XXI-lea, tratat care a făcut autoritate în toată această epocă, intitulat *Summulae logicales*, conținea un capitol (scolasticii spuneau *Tractatus*) asupra sofismelor — *Tractatus VI*: *Sophistici elenchi* —, dar conținea și toată teoria particulelor numite *syncategoremata*, care apărea, în unele ediții din *Summulae*, ca un tratat separat. Astfel, în edițiile din Colonia, tratatul este intitulat *Copulata omnium tractatuum Petri Hispani, etiam Sincathegoreumatum et parvorum logicalium cum textu*... Acest capitol, care este adăugat ca al optulea tratat din *Summulae*, face apoi parte din toate tratatele și compendiile de logică ale timpului.

În ceea ce privește problemele *insolubilia*, apar și ele la Petrus Hispanus, dar se detașează net, ajungînd să ocupe la logicienii de mai tîrziu spațiul unui tratat întreg și independent, așa cum îl găsim la Buridan, Pierre d'Ailly, Albertus de Saxonia, Paulus Nicolettus Venetus etc.

Ne vom ocupa numai de ultimele două tratate, întrucît primul, cel asupra sofismelor, nu ne interesează deocamdată.

Problema particulelor *syncategoremata* a fost complet neluată în seamă de logicienii moderni și contemporani, fiind considerată probabil o problemă pur gramaticală. Dar, așa cum se va vedea, tocmai prin studiul acestei probleme logicienii scolastici au ajuns la o soluție remarcabilă a paradoxelor logico-matematice actuale. O excepție la această omisiune, dar numai pînă la un anumit punct, o constituie apariția unei traduceri în engleză a tratatului despre *syncategoremata* de Petrus Hispanus, sub titlul: Peter of Spain, *Tractatus syncategorematum*, urmată de traducerea unor mici tratate anonime, dintre care unul asupra insolubilelor (Milwaukee, Wisconsin, 1964). Dar din *Introducerea* acestei traduceri nu aflăm decît că e foarte important să știm exact ce rol a jucat acest tratat în Evul Mediu; nu se face însă nici o apreciere asupra acutei probleme de logică pe care o include.

Tot neglijate au fost și problemele *insolubilia*, deși au fost evocate uneori de către istoricii logicii, dar numai sub aspect istoric, adică fără a se face aplicare la paradoxele logico-matematice cunoscute actualmente.

Singurul care a făcut unele observații comparative este Bocheński. Obiectivul prezentului studiu este de a trece în revistă soluțiile logicienilor scolastici, de a lumina, prin aceste soluții, soluțiile date antinomiilor de către logicienii contemporani și, mai ales, de a arăta că existau în Evul Mediu soluții logice și simple date prin teoria *syncategoremata*, teorie complet ignorată de logica actuală, și care ar fi fost suficientă pentru rezolvarea contradicțiilor întîlnite în teoria mulțimilor sau în logica matematică.

II. PROBLEMELE „INSOLUBILIA"

Problemele așa-ziselor *Insolubilia* au fost ridicate de paradoxul mincinosului cu toate variantele sale, la care se atașează și alte antinomii de același tip. Pentru a putea aprecia aportul logicienilor scolastici, vom face un expozeu succint al moștenirii antice asupra acestui paradox, așa cum a fost primit de Evul Mediu.

ΨΕΥΔΌΜΕΝΟΣ-ul grecilor

Se știe că tradiția atribuie lui Eubulide din Milet, care aparținea școlii din Megara, paternitatea paradoxului mincinosului. Cel puțin așa pretinde Diogenes Laertios în lucrarea sa bine cunoscută *De vitis, dogmatibus et apophtegmatibus clarorum philosophorum.*

Nu vom enunța antinomia sub toate formele sale cunoscute în Antichitate, care se găsesc în monografia lui A. Rüstow, *Der Lügner (Theorie, Geschichte und Auflösung, Dissertationen,* Erlangen, 1910) și care sînt destul de bine sintetizate în *Formale Logik* de Bocheński; ne mărginim să dăm variantele principale și soluțiile generale ale paradoxului mincinosului.

Paradoxul se reduce la problema următoare: un mincinos care spune că minte, minte și cînd spune că minte, sau nu minte? Nu există în această problemă decît două răspunsuri, *tertium non datur*: 1. minte, 2. nu minte.

1. Dacă acela care spune că minte, minte, atunci nu e adevărat că minte, deci el nu minte.
2. Dacă acela care spune că minte, nu minte, atunci el minte.

Oricare ar fi poziția luată de mincinos, ea se distruge prin ea însăși.

O altă variantă a acestui paradox este cunoscută sub numele de Epimenide: Epimenide Cretanul spunea că toți cretanii sînt mincinoși. Dar, dacă această propoziție este adevărată, atunci Epimenide, cretan el însuși, minte, deci propoziția nu este adevărată; dacă această propoziție este falsă, atunci Epimenide, fiind cretan, afirmă în mod necesar o propoziție falsă, și deci propoziția este adevărată.

Această formă a paradoxului pune în evidență principiul lui Russell — *vicious circle principle* — după care nici o colecție nu poate conține un membru care să fie definit prin ajutorul colecției însăși, cum este cazul lui Epimenide, un element al clasei mincinoșilor cretani.

Alte paradoxe citate aici și care nu sînt altceva decît o formă mai dezvoltată a antinomiei mincinosului sînt argumentele numite ἀντιστρέφοντα, pe care latinii le numeau *reciproca*. Astfel erau, de pildă, argumentul crocodilului sau binecunoscuta argumentație din procesul intentat de Protagoras discipolului său Eulathus și încă alte multe variante. Subliniem că, așa cum scrie Aulus Gellius, această speță de sofism era considerată ca una dintre cele mai dificile sau cele mai vicioase. „Printre argumentele vicioase cel mai vicios e cel pe care grecii îl numesc ἀντιστρέφων *(Inter vitia argumentorum longe maximum esse videtur eorum. . .)*. La noi, unii îl desemnează pe drept prin cuvîntul *reciprocum*. Cădem în acest sofism ori de cîte ori argumentul desfășurat poate fi întors, îndreptat cu aceeași forță, împotriva autorului lui. Acesta este argumentul celebru de care s-a slujit Protagoras, cel mai redutabil sofist, împotriva elevului său Eulathus." *(Noctes atticae,* V, 10.*)*

Vom regăsi în Evul Mediu acest argument atît de înrudit cu argumentul mincinosului sub o formă simplificată. Această înrudire a fost semnalată și în zilele noastre de către F. Gonseth în cartea sa *Les Fondements des mathématiques* (Blanchard, Paris, 1926), în care istoria amuzantă a procesului Protagoras-Eulathus e transformată în „Legenda uriașilor cruzi și subtili".

Toate aceste paradoxe, care sînt dezvoltări ale „mincinosului", pot fi schematizate după cum urmează:

Fie a și b două obiecte, două propoziții (sau conținutul acestor propoziții) sau chiar două acțiuni; lui A îi vom aplica (sau „va primi") pe a dacă A

spune adevărul și îi vom aplica (sau „va primi") pe *b* dacă spune neadevărul. *A* declară însă: „primesc pe *b*". Dar această propoziție nu poate fi decît adevărată sau falsă, *tertium non datur*. Dacă această propoziție: „primesc (sau mi se aplică) *b* este adevărată, *A* trebuie să primească pe *a*, fiindcă a spus un lucru adevărat; dar, dacă primește pe *a*, a spus un lucru fals, deci ar trebui să primească pe *b*; dar în cazul acesta a spus adevărul, deci ar trebui să primească pe *a* etc. Dacă această propoziție e falsă, atunci, conform condițiilor problemei, *A* trebuie să primească *b*, dar în acest caz a spus adevărul, deci ar trebui să primească *a* etc. Ajungem la o contradicție oricare ar fi afirmația lui *A*, adevărată sau falsă.

Această schemă formală poate primi orice conținut posibil și se va ajunge mereu, sub aspectul amuzant al unei anecdote, la un paradox de genul examinat în procesul Protagoras-Eulathus.

Importanța pe care cei vechi o acordau paradoxelor, și în special celui al „mincinosului", reiese din nenumăratele studii și chiar tratate care s-au ocupat de aceste probleme. Aristotel însuși s-a ocupat de acest sofism în *De sophisticis elenchis* (§ 25) și în *Etica la Nicomah* (VII, 3) etc., iar discipolul său Theophrast s-ar părea că a scris trei tratate despre ψευδόμενος. Celebrul dialectician Chrysippos din școala stoică ar fi scris 28 de tratate asupra acestei probleme, iar poetul și filosoful Philetas ar fi murit din pricina eforturilor infructuoase pentru a găsi soluția problemei. O seamă de alți autori antici, printre care Cicero, Plutarh etc., menționează „mincinosul" iar Seneca scrie într-una din scrisorile lui *(Scrisoarea 45)* despre subtilitățile școlii și, mai ales, împotriva acelor subtilități pe care le califică drept „odioase" — *nil sapientiae odiosius acumine nimio*: „De ce să mă opresc atît de mult asupra acestui argument pe care tu însuți îl numești «mincinosul» și asupra căruia s-au scris atîtea lucrări".

Ceea ce ne interesează aici nu-i atitudinea lui Seneca — atitudine de înțelept disprețuind subtilitățile vane —, ci confirmarea lui că asupra „mincinosului" s-au scris atîtea cărți.

Să trecem acum la soluțiile date de logicienii vechi paradoxului mincinosului.

Aristotel dă acestui sofism o soluție nu destul de clară. Într-adevăr, în *Respingerile sofistice* (§ 25), Aristotel vorbește de sensul absolut și sensul relativ, care, dacă sînt confundate, provoacă un anumit tip de sofism. Avem textul următor: „Raționamentul este același cînd spunem că același om poate în același timp să mintă și să spună adevărul. Dar, cum nu-i ușor de văzut dacă sensul absolut se aplică lui «a minți» sau lui «a spune adevărul», cazul pare dificil de rezolvat. Nimic nu împiedică pe cineva să nu mintă într-un chip absolut și să spună adevărul într-o anumită chestiune și asupra unui lucru determinat. Cu alte cuvinte, să spună adevărul în unele asertiuni, dar nu în mod absolut."

Dar problema nu era aceasta, în orice caz nu în felul în care era prezentată de către Aristotel. Problema pentru care murise Philetas era dacă un mincinos, care s-a hotărît să mintă mereu și într-un mod absolut consecvent, poate să exprime poziția pe care și-a ales-o (prin propoziția „eu mint") fără contradicție.

Examinînd soluția de mai sus, Bocheński, fără să conteste ceea ce de altminteri au susținut și vechii logicieni, că problema mincinosului nu-i deloc atacată de răspunsurile lui Aristotel, constată totuși că Stagi-

ritul a exprimat o idee genială în acest răspuns. Această idee ar fi, după el, ceea ce de altfel au găsit şi logicienii Evului Mediu, ca şi logicienii moderni, cu privire la acest paradox, ideea „gradelor" care trebuie deosebite în antinomia mincinosului (sau, cum ar spune Russell, distincţia de „nivele" de limbaj).

Părerea noastră este că soluţia cea mai interesantă a problemei este aceea dată de Chrysippos şi regretăm că fragmentul pe care-l posedăm este destul de deteriorat. În interpretarea lui Bocheński *(Formale Logik*, p. 153*)*, soluţia lui Chrysippos are următorul sens: „eu mint" nu este o propoziţie, ci un sunet fără nici un sens, ceea ce ar corespunde integral cu concluziile noastre de mai jos. Propoziţia „eu mint", fiind contradictorie, se distruge prin ea însăşi şi nu reprezintă nimic.

Iată, aproximativ, cunoştinţele pe care logicienii scolastici le puteau avea despre problemă. Le-am menţionat pentru a putea aprecia progresul realizat în Evul Mediu în această direcţie şi pentru a arăta de asemenea, prin critica ce urmează, unde era exact nodul problemei, fapt care va permite o mai bună înţelegere a soluţiilor scolastice.

Importanţa problemei

Problema era destul de importantă în concepţia celor vechi, dacă atîţia gînditori s-au ocupat intens de ea. Dar de ce era considerată atît de gravă problema mincinosului? Fiindcă pentru gîndirea greacă în general, şi pentru gîndirea lui Aristotel în particular, un asemenea paradox ar fi ruinat complet gîndirea însăşi şi posibilitatea de sesizare a adevărului. Iată cum defineşte Aristotel principiul contradicţiei: „Este imposibil ca acelaşi atribut să aparţină şi să nu aparţină în acelaşi timp aceluiaşi subiect şi sub acelaşi raport" (*Metafizica*, 3, 1055, c 19). Nu trebuie să uităm că pentru Aristotel acest principiu este un principiu logic, sesizat de intelectul activ direct din inima realităţii. Contradicţia nu este posibilă, fiindcă însuşi principiul logico-metafizic al existenţei o împiedică să se producă. Şi dacă apare, contradicţia nu poate fi decît o eroare.

Un paradox nu e deci decît o eroare de logică, şi nu implică nimic, el nefiind decît un vid al gîndirii. De unde necesitatea de a găsi toate speciile posibile de sofisme, de a le clasifica şi de a găsi în mod tehnic soluţiile lor, problemă de care se ocupă într-o manieră exhaustivă ultima carte a *Organonului, De sophisticis elenchis*.

E bine să intervenim aici cu o observaţie pentru a clarifica unele consideraţii ce vor urma.

Aristotel s-a preocupat, printre alte probleme privind sofismele, şi de chestiunea clasificării lor. Dintr-un foarte general punct de vedere, sofismele pot fi împărţite în două mari categorii: 1. Sofismele de limbaj, numite *in dictione* — οἱ παρὰ τὴν λέξιν; 2. sofismele de gîndire sau logice, numite *extra dictionem* — οἱ ἔξω τῆς λέξεως. De unde s-a tras concluzia că aceste două categorii de sofisme trebuie să aibă tot două categorii de soluţii; ceea ce e fals şi ceea ce nu e, în nici un chip, de acord cu cele scrise textual de Aristotel. Într-adevăr, găsim în *De sophisticis elenchis* (§ 10) textul următor:

„Distincţia pe care unii o fac între argumente, spunînd că unele dintre ele se referă la limbaj iar altele la gîndire, nu e adevărată. E absurd să presupui că există argumente care se referă la cuvinte şi altele la gîndire şi deci

că ele n-ar fi identice." Concluzia lui Aristotel e clară: sofismele pot fi clasificate în mai multe feluri, dar toate au o singură soluție, soluția logică.

Deși textul lui Aristotel e suficient de clar, vom adăuga totuși unele observații pentru a sublinia de ce logicianul grec nu putea să ajungă la vreo altă concluzie. Într-adevăr, principiul principiilor, principiul contradicției, așa cum e enunțat de însuși Aristotel, e un principiu de ordin formal. Dacă un sofism se prezintă sub forma unei contradicții, atunci el înfrînge însuși principiul contradicției, adică principiul formal și logic al întregii realități; prin urmare, eroarea este una și aceeași eroare, indiferent de materia la care argumentul se aplică — *in dictione* sau *extra dictionem*. Gravitatea apariției unei contradicții este aceeași fie că e generată de întrebuințarea cuvintelor, fie de întrebuințarea noțiunilor pur logice sau matematice, fiindcă această contradicție înfrînge principiul formal al gîndirii și al existenței care este unic.

Acest punct de vedere a fost neglijat de logicienii contemporani, care au crezut că pot aranja noncontradicția unor teorii deductive prin „circumscrierea materialului" acestor teorii, și, neglijînd unele paradoxe care prin această „circumscriere" nu mai pot apărea în teoriile vizate (conținutul lor fiind străin „materialului" teoriilor considerate), ei au crezut că asigură astfel noncontradicția de care aveau nevoie. Punctul lor de vedere este însă principial eronat, deoarece *atît timp cît principiul contradicției este compromis undeva în lume, el este compromis, în însăși esența sa, în toată lumea.*

Lipsa de înțelegere a principiului fundamental al logicii a dus la împărțirea antinomiilor în „antinomii logice" și „antinomii semantice" sau la părerea că relațiile logice sînt funcție de obiectul însuși la care ele se aplică. Dar dacă principiile și relațiile logice sînt pur formale, adică independente de conținut, atunci conținutul, obiectele la care ele se aplică nu pot determina aceste relații și nici nu pot să le înfrîngă. De aici rezultă că concluziile unor fizicieni, Paulette Février, Jean L. Destouches etc., care cred că obiectul este „în funcție de ambianță" și că relațiile sînt, la rîndul lor, funcție de obiect, nu pot fi aplicate la relațiile logice de ordin pur formal.

E adevărat că logicienii contemporani au deplasat accentul de gravitate al problemei, făcîndu-l să alunece de la principiul contradicției la principiul terțiului exclus, gîndind că ceea ce este înfrînt într-o problemă de acest gen, de exemplu în paradoxul mincinosului, este principiul din urmă, care se enunță: un lucru este sau nu este, *tertium non datur*. Sau încă: o propoziție este adevărată sau falsă, *tertium non datur*. Dar acest joc pentru a ascunde contradicția adevărată e iluzoriu. Propoziția mincinosului „eu mint" nu poate fi declarată nici adevărată (fiindcă atunci e falsă), nici falsă (fiindcă atunci e adevărată). De unde logicienii au tras în mod imprudent concluzia că ea nu poate fi declarată nici adevărată, nici falsă și că ea scapă principiului terțiului exclus. Dar concluzia apare nejustificată chiar de la început. Iată ce se petrece în realitate cu propoziția „eu mint": dacă e adevărat, atunci e falsă; dacă e falsă, atunci e adevărată; deci e falsă, deci e adevărată și așa la infinit. Cu alte cuvinte, rezultă din raționamentul făcut cu propoziția „eu mint" că ea are valoarea de „adevăr" și valoarea de „fals" în mod simultan, că este contradictorie, deci că ea nu respectă principiul contradicției. Rezultatul logic al acestei aventuri dialectice trebuie să fie: propoziția „eu mint", fiind în același timp și adevărată și falsă, este contradictorie și deci se distruge ea însăși și nu afirmă nimic. Dar, în locul concluziei de mai sus, cei care s-au ocupat de problemă au gîndit că ar putea exprima contradicția obținută

traducînd-o prin echivalența a două propoziții contradictorii p și $\sim p$ și, diluînd astfel dificultatea, au legat problema de principiul terțiului exclus. Contradicția, e adevărat, nu apare direct și imediat în propoziția „eu mint", cum apare, de exemplu, în propoziția „un cerc este un pătrat". Vom arăta totuși că echivalența care se obține în paradoxe între două propoziții contradictorii, $p \equiv \sim p$, este în fond o contradicție. Într-adevăr, după teorema *5.23 din *Principia Mathematica*, o echivalență între două propoziții p și q este echivalentă cu o disjuncție logică, formulă care e o tautologie:

$$*5.23 \quad p \equiv q \cdot \equiv : p \cdot q \vee \sim p \cdot \sim q.$$

Să înlocuim cu $\sim p$ pe q și să ținem seama de principiul tautologiei:

$$p \equiv \sim p \cdot \equiv : \sim p \cdot p.$$

Echivalența a două propoziții contradictorii este echivalentă cu afirmația lor simultană. Iată rezultatul pe care l-am întrezărit în propoziția „eu mint" încă de la începutul acestei discuții.

Formularea insolubilelor

Problema așa-ziselor „insolubile" apare mai tîrziu, în cursul Evului Mediu. Urme ale acestei probleme, care gravitează în jurul faimosului ψευδόμενος al grecilor sau, altfel spus, în jurul ideii de adevăr — paradoxul stoic ἀληθεύων — se găsesc chiar în *Summulae logicales* ale lui Petrus Hispanus. Într-adevăr, Petrus Hispanus se ocupă de acest sofism: *A* spune adevărul, *B* spune adevărul, dar *A* și *B* afirmă în mod simultan falsul. Spun ei amîndoi adevărul sau nu?

Paradoxul se găsește sub diverse variante la toți logicienii de mai tîrziu, dar problema este complet înfățișată de către Ockam.

Vom rezuma aceste variante după tratatul lui Albertus de Saxonia (m. 1390), intitulat *Perutilis logica*.

Albertus de Saxonia enumeră 14 variante ale „mincinosului", dar mai adaugă încă 5, care se referă nu la adevăr, ci la unele acte interioare. Iată aceste forme diverse ale paradoxului.

1. *Propono illud insolubile: „Ego dico falsum" supposito quod nihil aliud dicam nisi istam propositionem „ego dico falsum"; et quaeritur, utrum propositio prolata a me sit vera vel falsa.*

Propun această insolubilă: „Spun falsul" presupunînd că nu spun altceva decît această propoziție „spun falsul" și se pune întrebarea dacă propoziția pronunțată de mine este adevărată sau falsă.

Bineînțeles că, dacă încercăm să determinăm adevărul sau falsul propoziției: *„Ego dico falsum"*, ajungem la paradoxul mincinosului.

2. *Propositio, quam profero, est similis propositioni quam profert Plato, posito quod Plato proferat unam propositionem falsam et nullam aliam, sc. „Homo est asinus" et sit ista B; et propositio quam ego profero sit ista „Nulla alia, quam ego profero est similis propositioni, quam profert Plato", et sit ista A. Tum quaeritur, utrum A sit verum vel falsum.*

Propoziția pe care o exprim este asemănătoare cu propoziția pe care o exprimă Platon, presupunînd că Platon enunță o singură propoziție

falsă și numai una, de exemplu: „Omul este un măgar", și fie această (propoziție) *B*; și propoziția pe care o exprim este „Nici o altă (propoziție) pe care o exprim nu este asemănătoare cu propoziția exprimată de Platon", și fie această (propoziție) *A*. Apoi ne întrebăm dacă *A* este adevărată sau falsă.

Se vede că această formă de paradox este una dintre formele argumentelor *reciproca* (Procesul Protagoras-Eulathus).

3. *„Haec propositio est falsa", posito quod per litteram „haec" demonstratur illamet propositio et vocetur B. Quaeritur utrum haec propositio B sit vera vel falsa.*

„Această propoziție e falsă", presupunînd că prin cuvîntul „această" indicăm această propoziție în ea însăși și că o numim *B*. Ne întrebăm dacă această propoziție *B* este adevărată sau falsă.

Această formă a paradoxului mincinosului este bine cunoscută în timpul nostru.

4. *Ponatur, quod Socrates dicat illam „Plato dicit falsum" et Plato dicat illam „Socrates dicit verum". Quaeritur, utrum propositio dicta a Socrate sit vera vel falsa.*

Să presupunem că Socrate spune această (propoziție) „Platon spune falsul" și Platon spune această (propoziție) „Socrate spune adevărul". Ne întrebăm dacă propoziția spusă de Socrate este adevărată sau falsă.

5. *Ponatur, quod non sit nisi tres propositiones, sc. „Homo est asinus", „Deus non est", „Omnis propositio est falsa". Tunc quaeritur, utrum tertia sit vera.*

Să presupunem că nu există decît trei propoziții, de exemplu, „Omul e un măgar", „Dumnezeu nu există", „Orice propoziție e falsă". După aceasta ne întrebăm dacă a treia propoziție e adevărată.

6. *Ponatur, quod Socrates dicat, Platonem dicere falsum, et Plato dicat, Ciceronem dicere falsum, et Cicero dicat Socratem dicere falsum. Tunc quaeritur, utrum Socrates dicat verum.*

Să presupunem că Socrate afirmă că Platon spune falsul și că Platon afirmă că Cicero spune falsul și că Cicero afirmă că Socrate spune falsul. După aceasta ne întrebăm dacă Socrate spune adevărul.

7. *Dicat Socrates „Deus est", et Plato „Solus Socrates dicit verum", et non sint alii loquentes in mundo. Tunc quaeritur, utrum Plato dicat verum.*

Să spună Socrate „Dumnezeu există" și să spună Platon „Numai Socrate spune adevărul" și să nu mai fie nimeni pe lume care să vorbească. Ne întrebăm apoi dacă Platon spune adevărul.

Mecanismul *reciprocum* funcționează aici într-o manieră evidentă: dacă propoziția lui Platon este adevărată, atunci numai Socrate spune adevărul, deci propoziția lui Platon e falsă, deci nu e adevărat că numai Socrate spune adevărul, ci și Platon (fiindcă nu mai sînt alte persoane *loquentes in mundo*), deci ceea ce spune Platon e adevărat, deci numai Socrates spune adevărul, deci ceea ce spune Platon este fals etc.

8. *Sint tantum tres propositiones in mundo, sc. „Homo est animal", „Deus est", „Omnis propositio praeter exceptivam est vera". Quaeritur utrum tertia sit vera.*

Să fie doar trei propoziții pe lume, de ex., „Omul este un animal", „Dumnezeu există, „Orice propoziție afară de (propoziția) exceptivă

este adevărată". Ne întrebăm dacă cea de-a treia (propoziţie) este adevărată.

9. *Dicat quilibet homo excepto Socrate „Deus est", et Socrates dicat „Omnis homo praeter me dicit verum".*

Oricare om în afară de Socrate să spună „*Zeul există*" şi Socrate să spună „Orice om în afară de mine spune adevărul".

10. *Dicat Socrates „Deus est", et Plato dicat „Homo est animal", et Cicero dicat „Homo est asinus", et Marcus dicat „Tot dicunt verum quot dicunt falsum". Quaeritur utrum quarta sit vera.*

Să spună Socrate „Zeul există" şi să spună Platon „Omul este un animal", şi să spună Cicero „Omul este un măgar" şi să spună Marcu „Ciţi (oameni) spun adevărul, atîţia (oameni) spun falsul". Ne întrebăm dacă cea de-a patra (propoziţie) este adevărată.

11. *„Deus est et aliqua copulativa est falsa", et sit sic, quod nulla alia copulativa sit in mundo, quam haec ipsa. Tum quaeritur, utrum sit vera.*

„Dumnezeu există şi orice altă (propoziţie) copulativă e falsă" şi să presupunem că nici o altă (propoziţie) copulativă nu mai există pe lume decît numai aceasta. Se pune apoi întrebarea dacă e adevărată.

12. *„Homo est asinus vel aliqua disiunctiva est falsa", et sit nulla alia disiunctiva in mundo.*

„Omul este un măgar sau oricare altă (propoziţie) disjunctivă e falsă" şi presupunem că nici o altă (propoziţie) disjunctivă nu mai există pe lume.

13. *„Si Deus est, aliqua conditionalis est falsa" et sit nulla alia conditionalis.*

„Dacă Zeul există oricare altă propoziţie condiţională e falsă" şi să presupunem că nu mai există nici o altă (propoziţie) condiţională.

14. *„Deus est, igitur ista consequentia non valet".*

„Zeul există, deci această consecinţă nu este valabilă".

La aceste „insolubile", care sînt construite cu ajutorul noţiunilor de adevăr şi fals, Albertus de Saxonia mai adaugă cinci, care apar în actele noastre interioare, cum sînt acţiunile exprimate prin verbele *a înşela, a greşi, a se îndoi, a se preface*: *„Nunc videndum est de insolubilibus, quae veniunt ex actibus nostris interioribus, sicut, decipi, errare, dubitare, fingere"*.

15. *Posito, quod in mente Socratis sit ista „Socrates decipitur" et nulla alia, et Socrates credat, illam propositionem esse veram, quaeritur, an Socrates credendo, eam esse veram, decipiatur.*

Să presupunem că în mintea lui Socrate este această (propoziţie) „Socrate se înşală" şi nici o altă propoziţie, iar Socrate crede că această propoziţie e adevărată şi ne întrebăm dacă Socrate, crezînd (acest lucru), se înşală.

16. *Socrates fingit se esse sophistam, positio quod fingere sit ostendere se talem qualis non est.*

Socrate se preface că e sofist, considerînd că a te preface înseamnă a te arăta aşa cum nu eşti în realitate.

17. *Possibile est Socratem se scire errare, posito quod errare sit false assentire vel non dissentire vel credere falsum esse verum.*

E posibil ca Socrate să știe că el comite o eroare considerînd că a comite o eroare înseamnă a afirma sau a nu nega ceva într-o manieră falsă sau a crede că falsul este adevăr.

18. *Posito quod illa propositio „Rex sedet vel aliqua disiunctiva in hoc folio est Socrati dubia" sit scripta in illo folio et nulla alia, posito quod Socratem lateat, an rex sedeat vel non, posito ulterius quod Socrates sit doctissimus in arte et inspiciat hanc propositionem in hoc folio, tunc quaeritur, an illa propositio sit scita a Socrate esse vera vel scita esse falsa vel dubia.*

Să considerăm că această propoziție „Regele stă jos sau orice (propoziție) disjunctivă (scrisă) pe această foaie este îndoielnică pentru Socrate" este scrisă pe această foaie și nici o altă (propoziție); să presupunem că aceasta e ascunsă lui Socrate (adică dacă regele este așezat sau nu); să mai presupunem că Socrate ar fi cel mai doct în știință și că el examinează această propoziție (scrisă) pe această foaie; apoi să ne întrebăm dacă propoziția e cunoscută de Socrate ca fiind adevărată sau ea e cunoscută ca fiind falsă sau îndoielnică.

19. *Posito quod Socrates sit talis conditionis quod non vult invadere Platonem, si Plato non invadit eum, et Plato sit talis conditionis, quod non velit invadere Socratem si Socrates vult invadere eum, et si Socrates non vult invadere eum, ipse velit invadere Socratem, tunc quaeritur, utrum Socrates invadit Platonem vel non.*

Să presupunem că Socrate ar fi într-o astfel de condiție încît nu vrea să-l atace pe Platon, dacă Platon nu-l atacă; și Platon ar fi într-o astfel de condiție încît nu vrea să-l atace pe Socrate, dacă Socrate vrea să-l atace iar dacă Socrate nu vrea să-l atace pe Platon, acesta vrea să-l atace pe Socrate; ne întrebăm atunci dacă Socrate atacă pe Platon sau nu.

Acestea sînt principalele forme sub care se prezintă „mincinosul" în tratatele scolastice.

În ceea ce privește „insolubilele" care sînt generate de „acțiuni interioare", ele erau cunoscute încă din Antichitate și socotite drept sofisme și argumente înșelătoare.

Găsim un astfel de argument sofistic la Aulus Gellius (*Noctes atticae*, XVIII, 2) extras din satirele lui Q. Ennius și care nu se referă direct la mincinos, ci la cel ce se decide să înșele mereu — *frustrator* = înșelătorul:

Nam qui lepide postulat alterum frustrari
Quem frustratur, frustra eum dicit frustra esse
Nam si se frustrari quem frustras sentit
Qui frustratur frustrast, si non ille est frustra.

Cel ce pretinde să înșele cu viclenie pe altul se înșeală spunînd că cel pe care-l înșeală este înșelat, pentru că cel pe care-l înșeli simte că e înșelat, cel care înșeală se înșeală, pentru că celălalt nu e înșelat.

Mai există și alte variante ale acestui sofism, unele simplificate, altele mai complicate, dar fondul lor comun rămîne același: antinomia mincinosului.

În realitate, toate aceste variante se reduc la următoarele trei forme, care sînt în același timp formele logice ale paradoxelor:

1. *„Ego dico falsum"*; 2. *„Propositio scripta in illo folio est falsa"*;

3. Forma ἀντιστρέφων: : Socrate pronunță o singură propoziție „*Plato dicit falsum*", și Platon pronunță o singură propoziție „*Socrates dicit verum*". Care din aceste două propoziții este adevărată și care falsă?

Poziția generală a logicienilor scolastici

Care este atitudinea logicienilor scolastici față de aceste probleme „insolubile"? Importanța acordată acestor probleme, care nu se confundă cu problema sofismelor, este subliniată de numărul mare de scrieri care s-au ocupat de ele, de spațiul care le-a fost atribuit în tratate și, în fine, de numeroasele discuții și soluții propuse pentru aceste „insolubile". O problemă de tipul acesta nu era considerată drept un amuzament logic, fiindcă punea prin ea însăși problema dificilă a principiilor logice și prin aceasta punea sub semnul îndoielii posibilitatea filosofiei de a se constitui ca *ancilla theologiae*.

Atitudinea aceasta este evidentă în toate tratatele epocii.

Iată cum enunță dificultatea logică cuprinsă într-o „insolubilă" Jean Buridan (m. 1358) în tratatul său de logică *Summula*, apărut ulterior sub titlul *Perutile compendium totius logicae Joannis Buridani*. . . (Venetiis, 1499). Pentru Buridan, o „insolubilă" pune problema dacă două propoziții contradictorii pot fi simultan adevărate: „*Quaeritur utrum ambae contradictoriae possint esse simul verae. . . Si eadem propositio est simul vera et falsa, ambae contradictoriae sunt simul verae.*"

Concluzia lui Buridan e că „insolubila" este o propoziție contradictorie, care e adevărată și falsă în același timp.

Analizînd paradoxul sub forma mai sus-citată: „*Socrates dicit falsum*" și: „*Plato dicit verum*", Buridan trage concluzia că propoziția lui Socrate este adevărată și falsă: „*quod propositio Socratis erat vera et falsa*".

Cu alte cuvinte, problema „insolubilelor" era în mod general, așa cum am arătat încă de la începutul acestui studiu, problema universalității principiului contradicției, nodul problemei antinomiilor. Și cu toate că ea părea să-l conteste, nimeni n-a îndrăznit să atace acest principiu, nici în Antichitate, nici în Evul Mediu.

Există oare in Evul Mediu opinia că o astfel de problemă este insolubilă? Putem afirma că, deși această poziție a fost uneori susținută, ea n-a avut nici o influență doctrinală asupra concepției generale a logicii. Atitudinea aceasta era consecința naturală a moștenirii grecești și a concepției lor asupra logicii. Grecii au văzut clar că în aceste probleme era în joc principiul contradicției, principiu indiscutabil valabil, și nu principiul terțiului exclus (pe care-l discută de altfel în toată amploarea în diverse împrejurări, ca, de pildă, în problema „viitorilor contingenți" — *futura contingentia*).

Într-un tratat anonim descoperit de Prantl la Paris și datind de pe la mijlocul secolului al XIV-lea citim că numele *insolubilia* are o triplă aplicație:

1° o „insolubilă" nu poate fi rezolvată în nici un fel — *quod nullo modo potest solvi*;

2° cu toate că am putea s-o rezolvăm, ea nu e rezolvată din cauza vreunei piedici oarecare;

3° în sfîrșit, din cauza dificultății problemei, ea se rezolvă dificil — *difficile solvitur*.

În conformitate cu prima aplicație a termenului „insolubilă", aceste paradoxe sînt numite *vox invisibilis*; în conformitate cu a doua aplicație a termenului „insolubilă", aceste paradoxe sînt numite *lapis absconditus in terra invisibilis*; în conformitate cu a treia aplicare, aceste paradoxe sînt numite *sol invisibilis*.

Autorul anonim se oprește la concluzia că o „insolubilă" este o problemă care se rezolvă logic, dar cu dificultate.

Această opinie e exprimată și în celebrul tratat al lui Ockam (m. 1347) *Summa totius logicae*. Unele ediții ale acestui tratat conțin un „tratat" întreg despre *insolubilia*, despre care Prantl crede că e adăugat mai tîrziu (părere la care s-a raliat și Ch. Thurot în Franța). În acest capitol al tratatului lui Wilhelm din Ockam este exprimată clar opinia generală asupra „insolubilelor". Unele sofisme se numesc „*insolubilia*" nu pentru că nu pot fi rezolvate în nici un mod, ci pentru că sînt rezolvate cu dificultate. Sau textual: *Non ideo dicuntur sophismata aliqua insolubilia, quia nullo modo possunt solvi, sed quia cum difficultate solvuntur.*

Putem afirma că aceasta e poziția tuturor logicienilor din Evul Mediu și toate manualele și compendiile ulterioare, de la Albertus de Saxonia și pînă la Paulus Nicolettus Venetus au susținut această atitudine. De altfel, poziția potrivit căreia o „insolubilă" n-ar putea fi rezolvată în nici un fel — *vox invisibilis* — nici nu e citată de Paulus Venetus (m. 1428) în a sa *Logica magna*, unde face un bilanț al tuturor soluțiilor și despre care vom vorbi mai departe.

Am mai putea cita un autor scolastic, Hentisberus (m. 1380), cunoscut mai tîrziu sub numele de Tysberus și care, între altele, a scris două „tratate" asupra sofismelor în care se ocupă de *insolubilia*. Acest autor citează o opinie (Prantl bănuiește că ar fi opinia unui oarecare Suisset) potrivit căreia ar fi posibil ca într-o „insolubilă" două propoziții contradictorii să fie în același timp false: *Scribit una opinio, quod in insolubilibus satis est possibile, quod duo contradictoria sint simul falsa.*

Această poziție n-a avut însă nici o importanță în Evul Mediu și concepția dominantă în această problemă rămîne că o „insolubilă" este o problemă dificilă care se rezolvă cu dificultate.

Soluțiile principale

Găsim în autorul anonim, citat mai sus, o clasificare generală a soluțiilor problemelor *insolubilia* în trei categorii:

1. O soluție e obținută prin *cassatio*, după care orice judecată de genul acesta este nulă și nu spune nimic (soluția lui Chrysippos).

2. O a doua soluție e obținută prin *restrictio*, printr-o justă *suppositio* a cuvintelor „adevărat" sau „non-adevărat"; cuvîntul „fals" nu poate fi pus *(suppositum)* pentru propoziția întreagă, din care el nu e decît o parte.

3. Obținem a treia soluție prin *fallacia secundum quid et simpliciter*, această soluție este soluția lui Aristotel.

Iată textul: *Est autem triplex oppositio circa insolubilia, sc. cassatio, restrictio, solutio secundum quid et simpliciter. Cassantes autem dicunt, quod dicens se dicere falsum, nihil dicit. Restringentes dicunt, quod littera falsum non*

potest supponere pro hac oratione, cuius est pars, nec similiter pars pro toto. (Cea de-a treia soluție este *per fallaciam secundum quid et simpliciter* a lui Aristotel).

Înainte de a enumera cele cincisprezece soluții citate de Paulus Venetus, vom examina mai de aproape trei din soluțiile scolastice, anume soluția lui Jean Buridan, soluția lui Albertus de Saxonia și soluția lui Pierre d'Ailly.

Soluția lui Buridan. Să considerăm, o dată cu Buridan, paradoxul sub forma sa reciprocă, așa cum l-am citat mai sus și așa cum îl găsim într-o altă lucrare a lui Buridan, pe care Prantl o citează în ediția din Paris (1518), *In Metaphysicen Aristotelis Quaestiones argutissimae Magistri Buridani:*

Socrate afirmă o singură propoziție: *Plato dicit falsum* și Platon afirmă o singură propoziție: *Socrates dicit verum* și nici unul dintre ei nu mai afirmă vreo altă propoziție.

Știm ce rezultat absurd decurge din aceste propoziții, dar iată raționamentul lui Buridan: *Si ergo dicamus, quod Socrates dicit verum dicendo quod Plato dicit falsum sequitur, quod Socrates dicit verum; et tamen dicebat, quod Plato dicit falsum; ergo Socrates dicebat falsum; et sic sequitur quod haec propositio Socratis erat vera et falsa.*

Care-i soluția lui Buridan? El analizează îndeaproape cuvîntul *simul* = în același timp, împreună, simultan, și constată că numai prin întrebuințarea imprudentă a acestui cuvînt putem ajunge la contradicții. Într-adevăr, spune Buridan, să considerăm propozițiile contradictorii *Socrates currit* și *Socrates non currit*; este evident că aceste propoziții nu pot fi simultan *(simul)* adevărate, cu toate că fiecare din ele poate fi adevărată într-un interval oarecare de timp, să zicem, într-o zi întreagă *(totum diem)*. Într-un chip analog să considerăm propozițiile *Socrates est vivus* și *Socrates est mortuus*, cărora li se aplică exact cele spuse mai sus.

Să considerăm timpul prezent ca un interval fie mic, fie mare; oricum ar fi „timpul", trebuie să-l plasăm „înaintea" prezentului sau „după" prezent; deci timpul real are o parte anterioară și o parte posterioară și trebuie să specificăm de fiecare dată în ce parte a timpului este plasată fiecare propoziție afirmată. Dacă considerăm timpul numai într-o accepție generală, fără a face nici o distincție, putem ajunge ușor la contradicții. Sau, cum spune Buridan: *Loquendo de tempore simpliciter et absolute nullum tempus praeteritum est tempus praesens et nullum futurum est tempus praesens, quia omne tempus praesens est.* Prin urmare, timpul trebuie împărțit în intervale și o propoziție poate fi declarată adevărată sau falsă numai după ce am precizat cînd, în ce timp. Astfel propozițiile: *Socrates est vivus* și: *Socrates est mortuus* încetează de a fi contradictorii dacă nu mai confundăm intervalele de timp, fiindcă una din ele aparține unui anumit interval al trecutului și cealaltă unui interval determinat de timp posterior acestuia.

Cu alte cuvinte, fiecare propoziție de acest gen, adică a cărei valoare de adevăr este stabilită empiric, trebuie să fie legată de un moment t_n, cînd e adevărată (sau falsă). Cele două propoziții citate de Buridan pot fi exprimate corect în modul următor: *Socrates est vivus* e adevărată în momentul t_m; *Socrates est mortuus* e adevărată în momentul t_n; pentru $t_m \neq t_n$ contradicția este inexistentă. E clar că t_m trebuie să fie diferit de t_n după datele problemei. Dar paradoxul dispare dacă alăturăm „timpii" lor celor două propoziții ale paradoxului *Platon dicit falsum* și *Socrates dicit verum*, cînd ele sînt valabile, „timpi" care nu trebuie confundați.

Soluția lui Buridan e legată de o teorie logică a Evului Mediu, teoria „obligațiilor", despre care vom vorbi mai tîrziu.

Soluția lui Albertus de Saxonia. L-am menționat pe acest logician scolastic și atitudinea sa cu privire la problema *insolubilia*. Să considerăm, cu Albertus de Saxonia, unul dintre paradoxe, de exemplu: *Ego dico falsum*. După ce a analizat contradicția binecunoscută, el conchide că semnificația unor astfel de judecăți poate fi în general obiectivă, dar în același timp se poate depărta de starea obiectivă a lucrurilor. Mergînd mai în adînc pe această cale, Albertus de Saxonia stabilește o regulă de o specială importanță pentru istoria acestei probleme. Făcînd teoria a ceea ce era numit atunci *impositio*, el spune că „nu e permisă nici o caracterizare al cărei sens să fie caracterizat prin judecata caracterizantă". În felul acesta, el vorbește de o *impositio dependens* care nu poate fi aplicată în mod necondiționat, sau în termenii săi proprii: *Nunquam impositio est admittenda, ubi significatio illius, quod imponitur, dependet ex veritate et falsitate propositionis, in qua ponitur; est enim e contra, quia veritas et falsitas dependet ex significatione impositorum... Impositio dependes dicitur, quae dependet ab aliquo actu utentis; circa quam est regula, quod non est admittenda nisi sub conditione.*

Prin urmare, *impositio* (a da nume, a da calificative) nu se poate face decît după anumite reguli, dintre care una este în mod cert aceasta: partea nu poate niciodată să reprezinte întregul din care ea este parte, *nunquam pars potest significare totum, cuius est pars*. Prin această regulă, spune Albertus de Saxonia, se rezolvă sofismul. Să presupunem că *A* reprezintă acest tot *(hoc totum)*: *A significat falsum*; ne întrebăm atunci dacă *A* reprezintă adevărul sau falsul. Dacă *A* reprezintă adevărul, atunci *A significat falsum* e falsă; dar am stabilit că *A* reprezintă acest tot (întreg) *A significat falsum* dacă *A* semnifică falsul, atunci propoziția *A significat falsum* e adevărată și *A* reprezintă aceasta, deci *A* reprezintă adevărul.

Acest sofism nu-i posibil dacă n-am comite eroarea de a lua partea drept întreg, și Albertus de Saxonia afirmă că multe sofisme pot fi rezolvate prin această regulă.

Soluția lui Pierre d'Ailly. Petrus de Allyaco (1350—1420?) e una dintre personalitățile proeminente ale Evului Mediu. Dintre scrierile sale ne interesează pentru dezbaterile de aici un tratat special asupra problemei *Insolubilia*, publicat împreună cu alte două tratate: *Destructiones modorum significandi* și *Conceptus*. Titlul complet era: *Destructiones modorum significandi. Conceptus et insolubilia secundum viam nominalium magistri Petri de Allyaco*. Chiar titlul spune că Petrus de Allyaco era ockamist, adică nominalist, indiferent dacă această parte a titlului *(secundum viam nominalium)* este adăugată de editor, cum presupune Prantl, sau nu.

În tratatul său despre *Insolubilia*, Pierre d'Ailly începe prin a spune: „Asupra așa-ziselor insolubile sînt foarte mulți care au avut opinii diferite. Căutînd o cale de ieșire și de înlăturare a dificultății *(viam evadendi et evacuendi difficultatem)*, n-am putut găsi nici o cale care să mă conducă la o demonstrație complet satisfăcătoare pentru mintea mea *(meae menti)*. De aceea voi încerca o explicație probabilă prin care să apară rădăcina dificultății *(radix difficultatis)* și o soluție radicală a problemei."

Dificultățile de care s-a izbit i-au părut a fi de două categorii: 1. o dificultate generală relativă la adevărul și falsul propozițiilor; 2. o a doua difi-

cultate de natură specială cu privire la propoziţiile de un gen special care au reflecţie asupra lor însele, *propositiones habentes reflexionem supra se.*

Pierre d'Ailly acceptă împărţirea ockamistă a propoziţiilor în trei categorii:

1. *propositio mentalis*;
2. *propositio vocalis*;
3. *propositio scripta.*

(Această diviziune îşi are originea în *Analiticele* lui Aristotel.) „Ultimele două categorii de propoziţii sînt subordonate direct şi imediat propoziţiei mentale, dar ele nu sînt subordonate între ele, aşa cum pretind unii."

Cele două dificultăţi menţionate de Pierre d'Ailly se reduc astfel:

1. Dificultatea privind în general noţiunile de adevăr şi fals revine la a stabili care e propoziţia mentală propriu-zisă *(proprie dicta)*, care e propoziţia adevărată şi care e propoziţia falsă;

2. Cu privire la cea de-a doua chestiune, trebuie să stabilim care e propoziţia care se reflectă asupra ei însăşi *(propositio habens reflexionem supra se)* şi în aceste condiţii modul în care ele apar în „insolubile" şi ceea ce trebuie să răspundem.

Propoziţia mentală propriu-zisă este un discurs adevărat sau fals, într-o manieră naturală *(naturaliter)*. Dar o astfel de propoziţie nu e adevărată sau falsă prin aceea că reprezintă adevărul sau falsul din afară. Altfel spus, adevărul sau falsul unei propoziţii mentale propriu-zise se găseşte în „esenţa mentală a judecăţii", adică în aprehensiunea mentală a unei stări obiective a lucrurilor. Aici apare ideea fecundă a lui Pierre d'Ailly, după care numai *propositio mentalis*, care se găseşte deasupra diferenţelor lingvistice, are un sens esenţial, care îi dă posibilitatea de a fi adevărată sau falsă.

Şi acum care-i propoziţia *habens supra se reflexionem* şi prin ce se distinge de *propositio mentalis*? Pierre d'Ailly stabileşte o distincţie foarte subtilă, pe care o vom sublinia pentru a-i releva importanţa. Propoziţiile vocale sau scrise reprezintă ceva; reprezentarea unui lucru poate fi făcută în două moduri: obiectiv sau într-un mod formal — *obiective et formaliter*. De exemplu, imaginea regelui îl reprezintă pe rege într-un mod obiectiv *(obiective)*, dar conceptul mental pe care-l avem despre rege îl reprezintă pe rege într-un mod formal sau ideea de „rege". Nici un lucru creat nu poate să se constituie în propria sa cunoaştere formală şi distinctă. Nici o propoziţie vocală sau scrisă nu poate să se reprezinte pe ea însăşi şi încă ceva într-un mod formal—*Nulla res creata potest esse propria et distincta cognitio formalis sui ipsius. Nulla propositio vocalis vel scripta potest significare se ipsam vel aliquid aliud formaliter.*

Pe scurt, Pierre d'Ailly face această distincţie naturală: propoziţia mentală poate fi adevărată sau falsă, după cum ea reprezintă o stare reală de lucruri sau nu, dar ea nu poate afirma ceva asupra ei însăşi; ea nu poate deci să se declare ea însăşi adevărată sau falsă. Sau cum o spune textual autorul nostru: *Nulla propositio mentalis proprie dicta potest significare se ipsam esse veram. . . nec potest habere reflexionem supra se.* Dar, dimpotrivă, putem scrie sau pronunţa orice propoziţie care poate atribui o valoare de adevăr unei propoziţii mentale, de exemplu: *Aliqua propositio mentalis est falsa.*

Pierre d'Ailly crede că a rezolvat problema „insolubilelor" bazîndu-se numai pe această distincţie, fiindcă a găsit propoziţiile care pot să se falsi-

fice ele însele *(falsificari se ipsas)* și explică apoi care-i confuzia pe care o facem cînd cădem pe o astfel de contradicție. După el, această *insolubilitas* nu alterează cu nimic judecata mentală, dar ea poate apărea în propozițiile mentale improprii și mai ales în propozițiile scrise sau pronunțate. Soluția pentru *insolubilia* rezidă atunci în observația că, „în urma unui paralelism făcut între o judecată orală sau scrisă și judecata mentală corespunzătoare, așa-zisa insolubilă ne pare a fi uneori adevărată și alteori falsă, și cu toate acestea [contradicția] este numai aparentă". Confuzia propozițiilor mentale cu propozițiile orale sau scrise este cauza apariției problemelor *insolubilia*.

Soluția dată de Pierre d'Ailly arată deci că valorile de adevăr ale unei propoziții mentale nu pot fi exprimate în însuși sistemul propozițiilor mentale, ci într-un alt sistem care se ocupă de aceste propoziții mentale, cum ar fi sistemul propozițiilor orale sau scrise.

Cele cincisprezece soluții ale logicienilor scolastici

Vom prezenta acum bilanțul tuturor soluțiilor date problemei *insolubilia* de către logicienii scolastici, bilanț pe care îl găsim gata făcut în lucrările lui Paulus Venetus. Acesta ne dă o listă completă a soluțiilor scolastice în tratatele *Logica magna*, *Quadratura* (care e o explicație a sofismelor) și, în sfîrșit, în *Sophismata*. În *Logica magna*, tratatul VI e intitulat *Insolubilia*. Pentru Paulus Venetus o „insolubilă" este o judecată care se repliază asupra ei însăși, care se reflectează pe sine însăși *(reflexio supra se)* și care se falsifică parțial sau integral, concepție foarte apropiată de aceea a lui Pierre d'Ailly asupra naturii acestor probleme și asupra soluțiilor lor. Pentru el toate aceste probleme sînt sofisme numite *insolubilia, sophisma quod insolubile nuncupatur*.

Lista celor cincisprezece soluții e dată și de Bocheński în *Formale Logik* (p. 280), dar el dă numai traducerea. Dăm o dată cu textul latin și comentariile pe care le socotim necesare.

1. *Prima opinio ponit, quod insolubile solvendum est per fallaciam figurae dictionis.*

Prima opinie consideră că insolubila trebuie să fie rezolvată prin *fallacia figurae dictionis*.

Știm că acest gen de sofism a fost discutat de Aristotel și se numește astfel fiindcă eroarea comisă rezidă într-o confuzie gramaticală — *fallacia figurae dictionis* —, confuzie provocată de faptul că două lucruri diferite au nume cu inflexiuni gramaticale identice. Argumentul acestei soluții este următorul: cînd tragem concluzia propoziției „Socrate spune ceva fals, deci Socrate spune falsul", vom nega concluzia, fiindcă aceasta constituie un sofism de mod de vorbire — *fallacia figurae dictionis*; în antecedent termenul „fals" e pus pentru *dictum*, dar în consecvent pentru un alt lucru.

2. *Secunda opinio ponit quod insolubile solvendum est per fallaciam secundum non causam.*

Cea de-a doua opinie presupune că o „insolubilă" trebuie să fie rezolvată *per fallaciam secundum non causam*.

Acest sofism a fost analizat de Aristotel în *De sophisticis elenchis* (§ 29) și este sofismul în care luăm drept cauză (logică) a unui lucru ceea ce nu este cauza sa.

Antecedentul („Socrate spune ceva fals") e luat drept cauză (logică) a propoziției consecvente („Socrate spune falsul în mod general") a cărei cauză nu este.

3. *Tertia opinio dicit, quod Socrate dicente „Socrates dicit falsum" hoc verbum „dicit" licet sit praesentis temporis, tamen debet intelligi de tempore immediate praecedente tempus prolationis.*

A treia opinie afirmă că, Socrate spunînd „Socrate spune falsul", acest verb „spune", chiar admițînd că se referă la timpul prezent, trebuie totuși înțeles ca referindu-se la un timp precedînd imediat timpul pronunțării sale.

E poziția despre care am mai vorbit și care cere să atașăm fiecărei propoziții un timp *t* cînd ea are o valoare de adevăr determinată. Am văzut că aceasta era și poziția lui Buridan.

Argumentul reprezentanților acestei poziții este: cînd spunem „această propoziție e falsă" și Socrate spune această propoziție, deci „Socrate spune falsul", verbul „spune" din propoziția antecedentă și verbul „spune" din propoziția consecventă se referă la timpi diferiți.

4. *Quarta opinio ponit, quod nullus potest dicere, se dicere falsum, nec aliqua propositio potest esse, ex qua insolubile posset generari.*

Cea de-a patra opinie consideră că nimeni nu poate spune că spune falsul, și nu există propoziție din care să poată fi generată o „insolubilă".

5. *Quinta ponit, quod Socrates dicens se ipsum dicere falsum, nihil dicit.*

A cincea consideră că Socrate, spunînd că el însuși spune falsul, nu spune nimic.

Am văzut că în Antichitate Crysippos a susținut această opinie remarcabilă, anume că mincinosul nu spune nimic.

6. *Sexta ponit, quod insolubile nec est verum nec falsum, sed medium indifferens ad utrumque.*

A șasea presupune că „insolubila" nu e nici adevărată, nici falsă, ci e la mijloc, indiferentă față de unul sau de altul (de adevăr sau de fals).

Bocheński crede că această soluție este o tentativă de a rezolva *insolubilia* printr-o logică trivalentă, dar aceasta depășește cu mult ideea partizanilor ei scolastici.

Putem conceda, cel mult, că partizanii acestei soluții concepeau propoziția insolubilă ca pe o propoziție analogă acelora din *futura contingentia*, care nu pot fi declarate adevărate sau false din cauza incertitudinii pe care o avem asupra evenimentelor viitoare contingente.

7. *Septima ponit, quod est solvendum per fallaciam aequivocationis.*

A șaptea (opinie) consideră că ("insolubila") trebuie să fie rezolvată prin *fallacia aequivocationis.*

Acest sofism a fost studiat de Aristotel în *De sophisticis elenchis* (§ 19) și consistă în faptul de a confunda două sensuri diferite. „Tot ce are un dublu sens — scrie Aristotel — e sau adevărat sau fals, potrivit contextului."

8. *Octava ponit, quod nullum insolubile est verum vel falsum, quia nullum tale est propositio.*

A opta (soluție) presupune că nici o „insolubilă" nu e adevărată sau falsă, fiindcă nici o propoziție de felul acesta nu e o propoziție.

Cunoaștem o poziție contemporană care susține aceasta: este concepția neopozitivistă, după care o propoziție nu e o propoziție decît numai

dacă poate fi declarată adevărată sau falsă, altfel ea nu reprezintă decît o aglomerare de sunete fără conținut semnificativ. Or, o „insolubilă" este tocmai o propoziție care nu poate fi declarată nici adevărată, nici falsă, deci ea nu e o propoziție, ci un *flatus vocis*.

9. *Nona ponit, quod insolubile est verum vel falsum, sed non est verum nec falsum.*

A noua (soluție) consideră că „insolubila" e adevărată sau falsă, dar nu este adevărată și nu este falsă.

Bocheński crede că partizanii acestei opinii admit alternativa „*A* este adevărat sau fals", dar refuză afirmațiile separate „*A* este adevărat" și „*A* este fals".

Am putea deci concepe, potrivit acestei soluții, că „insolubila" este un fel de a exprima principiul terțiului exclus, adică ne-am găsi într-o „insolubilă" în fața unei disjuncții logice, p sau q, dar nu putem determina valorile de adevăr ale lui p și q, care ar fi, în limbajul lui Russell, numai considerate.

10. *Decima solvit per fallaciam secundum quid.*

A zecea (soluție) rezolvă „insolubila" prin *fallacia secundum quid*.

Așa cum am văzut, e soluția dată de Aristotel paradoxului mincinosului.

11. *Undecima ponit, quod omnis propositio insolubilis significat, se esse veram et se esse falsam, intelligendo de adaequato significato.*

A unsprezecea (opinie) consideră că orice propoziție insolubilă semnifică ea însăși că e adevărată și ea însăși că e falsă, dar e vorba de semnificația ei adecvată.

Această soluție e o variantă a soluției date de Albertus de Saxonia, după care semnificația adecvată consistă în primul rînd în a plasa cuvintele exact pentru obiectul pe care ele îl semnifică, nici mai mult, nici mai puțin.

12. *Duodecima opinio, quae jam communiter ab omnibus sustinetur, est ista, quod insolubilis est propositio, de qua fit mentio in aliquo casu, quae, si cum eodem casu praecise significet, sicut termini praetendunt, sequitur, ipsam esse veram et ipsam esse falsam.*

A douăsprezecea opinie, care în general este susținută de toți la ora actuală, este aceea că „insolubila" e o propoziție menționată în unele cazuri fortuite, propoziție care — dacă ar semnifica în același caz fortuit ceva precis, așa cum pretind termenii — rezultă că ea însăși e adevărată și ea însăși e falsă.

Explicațiile date acestei soluții arată că propoziția „insolubilă" este o propoziție empirică care nu poate fi adevărată sau falsă în afara timpului, ci numai în intervale limitate de timp.

Sînt două lucruri interesante cu privire la această soluție.

În primul rînd, informația prețioasă că această opinie e susținută de „toți la ora actuală".

Dar care e în fond această soluție? Este soluția lui Buridan, care face să depindă valorile de adevăr ale unei propoziții de timpul în care această propoziție are aceste valori. Însă, spun partizanii acestei soluții, o propoziție empirică declarată la un moment dat adevărată sau falsă duce direct la o „insolubilă" dacă vrem să vedem care-i valoarea ei de adevăr în afara timpului.

Această soluție face parte dintr-o teorie mai amplă — și acesta-i al doilea punct interesant relevat de soluție —, așa-zisa teorie a obligațiilor care ajunsese să ocupe un capitol întreg *(tractatus)* în manuale. După această

teorie, există un timp de obligație — *tempus obligationis* — pentru orice propoziție empirică, în intervalul căruia cel ce afirmă este legat de afirmația sa, și în afara acestui interval de timp este eliberat de orice obligație față de propoziția sa.

Teoria *obligatoria* apare încă din secolul al XII-lea și se dezvoltă în legătură cu tehnica discuției — *ars disputandi*. Astfel, găsim la un logician bine cunoscut din Evul Mediu, Radulphus Strodus (care scria prin jurul anului 1370), și de la care posedăm un tratat întreg asupra teoriei *obligationes*, definiția lui *Obligatio*: „Obligația este o enunțare la care cel ce răspunde *(respondens)* consimte sau trebuie să fie obligat să răspundă". Teoria obligațiilor — pe care Strodus o numea o *„militia scholastica"* — definește și durata timpului unei obligații: *Tempus obligationis durat ab instanti, quo casus admittitur, quousque dicat opponens „Cedat tempus obligationis" vel se transfert ad disputandum in alia materia vel penitus dimittit disputationem.* Adică timpul obligației durează din momentul în care ai admis propoziția empirică, și pînă cînd opozantul — *opponens* — spune: „Timpul obligației încetează" . . .

Teoria obligației stabilește de asemenea diverse situații — *status* — care sînt definite într-o manieră precisă și obligațiile respective, care decurg din aceste situații în cadrul discuției și răspunsurile care trebuie date în fiecare *status*.

Nu putem intra în detaliile acestei teorii destul de interesante, dar am văzut că soluția lui Buridan este bazată pe această concepție.

13. *Tertiadecima ponit plura puncta: Nulla res creata potest distincte repraesentare se ipsam formaliter, sed bene obiective: nulla propositio mentalis proprie dicta potest significare, se ipsam esse veram, nec, se ipsam esse falsam; pars propositionis mentalis non potest supponere pro ipsa propositione; omnis propositio insolubilis est propositio vocalis, scripta vel mentalis improprie dicta; cuilibet insolubili correspondet aliqua mentalis proprie dicta vera et aliqua falsa.*

A treisprezecea opinie pune mai multe puncte: Nici un lucru creat nu poate să se reprezinte el însuși în mod distinct într-o manieră formală; dar (el poate să se reprezinte el însuși) cu totul obiectiv; nici o propoziție mentală propriu-zisă nu poate semnifica că ea însăși este adevărată sau că ea însăși e falsă; o parte a unei propoziții mentale nu poate fi pusă în locul propoziției însăși; orice propoziție insolubilă e o propoziție vocală, scrisă sau mentală impropriu-zisă; oricărei „insolubile" îi corespunde o propoziție mentală propriu-zisă adevărată sau o (propoziție mentală propriu-zisă) falsă.

Aceasta e soluția lui Pierre d'Ailly, căreia i s-a mai adăugat și punctul de vedere al lui Albertus de Saxonia *(Nulla res creata potest distincte repraesentare se ipsam formaliter . . .)*.

Am discutat mai sus aceste soluții, așa că nu ne mai oprim la această „opinie".

14. *Quartadecima opinio, quae est fundamentum multarum praecedentium et ideo. . . plus subterfugere quam respondere, conatur, ponit insolubilia solvenda penes fallaciam accidentis.*

A paisprezecea opinie, care e fundamentul multor (soluții) precedente, și pentru aceasta face efortul de a evita, mai ales, decît a rezolva, presupune că insolubilele trebuie rezolvate prin *fallacia accidentis.*

Acest gen de sofism *fallacia accidentis* a fost amplu tratat de Aristotel în *De sophisticis elenchis* (§ 20), cu toate să nu în modul acesta rezolvă el sofismul mincinosului. Eroarea comisă într-un astfel de paralogism constă în ipoteza, admisă implicit, că subiectul și predicatul au toate atributele lor în comun. Comitem cel mai des acest sofism în formulele scurte, cînd o expresie poate fi întrebuințată, în mod eronat, în mai multe sensuri. De exemplu, spun partizanii acestei soluții — după cum explică Paulus Venetus — cînd Socrate spune „Socrate spune falsul", el spune ceva fals; dar în argument noi avem „Socrate spune ceva, și acest ceva este fals, deci Socrate spune falsul"; atunci partizanii acestei soluții *(quartadecima)* refuză concluzia, spunînd că avem aici un sofism prin accident, prin schimbarea termenului „fals". Într-adevăr, în antecedentă termenul „fals" e pus pentru un anumit lucru pe care Socrate îl declară fals, dar în consecventă termenul e plasat pentru tot ce spune Socrate, inclusiv propoziția declarată de el. „Să presupunem că în nici o propoziție partea nu e pusă pentru un întreg din care ea face parte — raționează partizanii soluției — și nici pentru un întreg echivalent... Rezultă atunci, cu toată evidența, că propoziția *Socrates dicit falsum* înseamnă că Socrate spune ceva fals sau că ceea ce spune el însuși e fals, dar ceva fals diferit de ceea ce spune el."

15. Cea de-a cinsprezecea soluție e cea a lui Paulus Venetus. El trece în revistă soluțiile date înaintea lui, discutîndu-le amplu, ceea ce-l duce la unele concluzii care sînt, în fond, distincții relative la soluțiile precedente. Să vedem mai întîi ce spune despre aceste distincții.

Pro declaratione quintadecimae opinionis infertur: ...Omne insolubile aut oritur ex actu nostro aut ex proprietate vocis... Propositionum quaedam habent reflexionem supra se, quaedam non; ... habentium reflexionem supra se quaedam habent immediate, quaedam mediate; ... et quaedam se ipsa ponunt, quaedam se destruunt; significatium, se esse falsa, quaedam hoc significant de per se, quaedam de per accidens; quaedam sunt totaliter illativae suarum falsitatem, quaedam partialiter... Propositio habens reflexionem supra se non insolubilis est illa, quae non est totaliter nec partialiter illativa suae falsitatis... Propositio insolubilis est propositio habens supra se reflexionem suae falsitatis totaliter vel partialiter illativa... Multae propositiones insolubilis nominatur, quae non sunt.

Pentru expunerea celei de-a cinsprezecea opinii, se spune: ... Orice „insolubilă" e generată sau de unul dintre actele noastre, sau de o proprietate a discursului... Unele propoziții au o reflecție asupra lor însele, unele (propoziții) nu o au; unele (propoziții) dintre acelea care au reflecție asupra lor însele o au de o manieră imediată, altele de o manieră mediată; ... și unele se impun ele însele, altele se distrug ele însele; unele (propoziții) din cele ce semnifică ele însele a fi false, semnifică prin ele însele, unele „prin accident"; unele (propoziții) sînt în mod total cauzele falsului lor, altele în mod parțial...

Propoziția avînd reflecție asupra ei însăși noninsolubilă este aceea care nu e nici total, nici parțial cauza falsului său... Propoziția insolubilă este o propoziție avînd reflecție asupra ei însăși, ceea ce provoacă falsul ei total sau parțial... Sînt numite insolubile multe propoziții care nu sînt insolubile.

Nu vom urmări toată această discuție pe care Paulus Venetus o face cu privire la cele paisprezece soluții și care de altminteri nu aduce mare

lucru, în afara cîtorva delimitări, de unde reiese poziţia sa eclectică în raport cu acest subiect. Vom spune numai că poziţia lui Paulus Venetus nu e originală; este o poziţie bazată pe soluţia lui Albertus de Saxonia şi pe teoria obligaţiilor.

Observaţii asupra soluţiilor date problemelor insolubilia de logicienii scolastici

Să facem acum un bilanţ al acestor tentative de a rezolva paradoxul mincinosului şi diversele lui variante de logicienii scolastici.

1. O primă observaţie care se impune este asemănarea tuturor acestor soluţii sau mai ales principiul logic comun care le fundamentează pe toate. Faptul e subliniat chiar de Paulus Venetus cînd observă că opinia a paisprezecea e fundamentul a mai multe soluţii precedente. Dar această soluţie *(quartadecima)* rezolvă paradoxul mincinosului *per fallaciam accidentis*. Altfel spus, logicienii scolastici constataseră, în fiecare dintre soluţiile date, că într-o „insolubilă" se consideră „prin accident" un lucru ca şi cînd ar fi un alt lucru. Chiar dacă logicienii scolastici s-au pierdut printre alte consideraţii asupra paradoxelor, au avut grijă să pună în relief confuzia de sensuri făcute prin accident. Putem rezuma în trei categorii de sofisme *per fallaciam accidentis* toate soluţiile logicienilor scolastici:

— Se ia prin accident partea drept întreg, adică falsul unei expresii parţiale drept falsul expresiei întregi;

— Se ia prin accident un interval de timp determinat, cînd o propoziţie este adevărată sau falsă, drept un interval de timp nedeterminat;

— În sfîrşit, se ia prin accident o propoziţie mentală *proprie dicta* drept o propoziţie orală sau scrisă.

Această eroare făcută „prin accident" reprezintă nodul logic al problemei.

E de remarcat că nici unul dintre logicienii contemporani n-a considerat acest punct de vedere — singurul logic de altminteri — că numai „prin accident" se pot confunda două lucruri diferite şi astfel toată problema paradoxelor intră în cadrul sofismelor. Vom vedea mai departe că soluţia logică este în mod precis *per fallaciam accidentis*.

2. În toate aceste soluţii distingem unele situaţii: deosebirea momentelor ataşate propoziţiilor cînd ele sînt adevărate sau false; deosebirea părţii de întreg; deosebirea făcută între propoziţiile mentale, vocale sau scrise etc. Dar toate aceste deosebiri nu sînt altceva decît deosebirile găsite de logicienii contemporani, utilizate în scopul de a rezolva paradoxele şi numite actualmente „niveluri de limbaje", „logică şi metalogică", „limbaj şi metalimbaj" etc.

3. Comparînd soluţiile scolastice cu cele moderne ale „mincinosului", o remarcă se impune de la sine: pe cînd logicienii scolastici vor să arate în ce consistă eroarea de logică făcută şi să aibă în acelaşi timp o explicaţie a paradoxului, logicienii contemporani, în prezenţa paradoxului, stabilesc ce convenţii trebuie făcute pentru a evita apariţia paradoxelor. Logicienii actuali nu doresc clarificarea logică a paradoxelor şi nici măcar nu-şi pun întrebarea pînă la ce punct sînt adevărate regulile date pentru a elimina contradicţiile unei teorii deductive. Într-adevăr, iată ce scrie Hans Reichen-

bach în lucrarea sa *Elements of Symbolic Logic* (New York, 1948): „S-a pus întrebarea dacă e necesar să introducem aceste reguli (ale « nivelelor de limbaj »). Un lucru e sigur: singura rațiune pe care o putem da pentru aceste reguli e aceea că ele exclud contradicțiile. Întrebarea dacă teoria tipurilor sau teoria nivelelor de limbaj e adevărată nu se pune." Vedem deci că poziția scolastică era mult mai logică, fiindcă dorea să lumineze contradicția și prin această lumină, îndreptată asupra nodului problemei, să producă dispariția contradicției. Înțelegem, într-adevăr, foarte bine ceea ce ni se spune prin afirmația: Nici un lucru creat nu poate să se reprezinte distinct și formal el însuși *(Nulla res creata potest distincte repraesentare se ipsam formaliter,* soluția a treisprezecea*)*. E o problemă de logică și nu de convenție prohibitivă. Și caracterul logic al acestui răspuns a fost înțeles de un singur logician contemporan, Ludwig Wittgenstein, care, după cum vom mai menționa, a exprimat exact și aproape textual aceeași idee, fără nici o aluzie la logicienii scolastici. În concepția lui Wittgenstein, teoria russelliană a tipurilor, care apare și ea ca o simplă convenție, nefiind deloc necesară, este, după el, exprimată în chip eronat de către Russell, fiindcă este evident că „nici o propoziție nu poate spune ceva asupra ei însăși, fiindcă semnul *propozițional* nu poate fi conținut în el însuși" (prop. 3. 332). Și Wittgenstein adaugă: „*Das ist die ganze « Theory of types »*", aceasta este întreagă teoria tipurilor.

4. Putem constata în plus că nimic esențial din ceea ce timpurile noastre au spus cu privire la problema paradoxelor logico-matematice nu depășește soluțiile logicienilor scolastici.

5. În sfîrșit, dacă examinăm într-o privire de ansamblu soluțiile scolastice și cele ale logicienilor contemporani, putem spune că nici unii, nici ceilalți n-au găsit soluția logică și simplă, capabilă să clarifice toate punctele problemei, așa cum sînt diversele soluții date sofismelor de Aristotel în *De sophisticis elenchis*.

Pluralitatea soluțiilor logicienilor scolastici arată că soluția logică a „mincinosului", definită și indiscutabilă, nu fusese găsită încă, deși aceștia ajunseseră foarte aproape de nodul logic al problemei, în tot cazul mult mai aproape decît contemporanii noștri.

Dar nici logicienii moderni n-au găsit această soluție, și simțim atît în fața soluțiilor actuale, cît și în a celor scolastice aceeași insatisfacție intelectuală. Și concluzia lui Beth din cartea sa *Fondements logiques des mathématiques* (Paris, 1955), deci în timpurile noastre, s-ar fi putut impune și — *mutatis mutandis* — la sfîrșitul Evului Mediu: „Pentru acest motiv, descoperirea antinomiilor a compromis atît de grav și logica generală și teoria mulțimilor, care se instituise în rivală a logicii, și constituie un pericol amenințător pentru întregul edificiu al științelor deductive și îndeosebi pentru matematici".

Dacă în comparație cu noi, logicienii scolastici au avut avantajul de a nu se încurca de teoria mulțimilor, și aceasta pentru bunul motiv că nu o cunoșteau. . . e sigur că erau perfect conștienți de gravitatea problemei din punct de vedere epistemologic, și de aici amploarea cercetărilor lor în acest domeniu, cercetări care nu erau deloc *Spielereien*, cum credea Prantl.

III. PROBLEMA PARTICULELOR SYNCATEGOREMATA

Am amintit de problema particulelor numite *syncategoremata* sau *syncategoreumata*. Această problemă, importantă în Evul Mediu şi absolut ignorată în timpurile noastre, a fost probabil considerată ca aparţinînd gramaticii. Dar acest punct de vedere este absolut fals şi o vom demonstra mai departe. Într-o istorie a logicii ca aceea a lui Bocheński, problema particulelor *syncategoremata* este de-abia menţionată (*Formale Logik*, 26.01, 26.09), în paragraful „Concepte fundamentale semiotice". Manualele moderne de logică nu conţin această problemă şi ar fi interesant de stabilit cînd a dispărut acest capitol din tratatele de logică.

Problema particulelor *syncategoremata* îşi are originea în lucrările unui gramatician latin, Priscianus (care conducea o şcoală celebră la Constantinopole spre sfîrşitul secolului al V-lea şi începutul secolului al VI-lea), şi în special în lucrarea sa capitală *Institutiones grammaticae* (în XVIII cărţi), operă vizibil influenţată de teoriile logico-gramaticale ale stoicilor. Am semnalat în introducere locul important al acestei probleme în tratatele din Evul Mediu.

Să vedem, mai întîi, care sînt aceste *syncategoremata* şi cum s-a ajuns la concluzia că au o legătură strînsă cu logica.

Exista şi în Evul Mediu o clasificare a ştiinţelor şi printre ştiinţele studiate atunci exista, clasată la locul său, „ştiinţa discursivă" — *scientia sermocinalis*, un nume curent la acea epocă — prin care se ajunge la „rezultate" în celelalte ştiinţe. *Scientia sermocinalis* era şi ea împărţită în trei alte ştiinţe, cu scopul de a învăţa să vorbim corect, să vorbim cu elocinţă şi să vorbim adevărat. Găsim această împărţire la Wilhelm de Shyreswood (m. 1249):

Scientia sermocinalis

1. *Grammatica, quae docet recte loqui*
2. *Rhetorica, quae docet ornate loqui*
3. *Logica, quae docet vere loqui.*

Logica se ocupă în mod principal cu silogismul, a cărui cunoaştere presupune cunoaşterea propoziţiilor care-l compun, şi fiindcă orice propoziţie e compusă, la rîndul ei, din termeni, cunoaşterea termenilor se impune.

Nu vom urmări toate detaliile acestei probleme de logică cu aspect gramatical, ci ne vom opri direct la problema particulelor *syncategoremata*.

Începînd să studieze propoziţiile prin termenii lor constitutivi, logicienii au constatat că unii sînt absolut necesari pentru construirea unei propoziţii, iar alţii nu sînt. Wilhelm de Shyreswood ca şi Petrus Hispanus şi ceilalţi logicieni spun precis că propoziţia are numai două părţi, substantivul şi verbul, celelalte părţi sînt numite *syncategoremata*: *Sciendum autem est quod logica duas tantum ponit partes orationis, scilicet nomen et verbum; ceteras autem partes appellat syncategoremata.*

Sau, altfel spus, există cuvinte care au un sens autonom prin ele înseles, acestea sînt numai substantivul şi verbul şi ele se numesc *categoremata*; alte cuvinte, ca prepoziţii, conjuncţii, adjective nedeterminate, particule de legătură, particule de flexiune etc. nu au un sens determinat şi autonom, dar primesc un sens determinat în propoziţie în raport cu *categoremata*, şi de aceea se numesc *syncategoremata*.

Termenul *syncategoremata*, care se găsea și la stoici și, bineînțeles, la Priscianus, e compus în felul acesta (și logicienii scolastici aveau grijă să-l explice): „*syncategoremata* e un cuvînt grec, *syn* înseamnă *cum*, *syn* = = *cum* și *categorare* însemnînd *praedicare*, de unde *categoriae*, care în limba latină se spune *praedicamenta*; de unde apoi, dacă spunem că *praedicari* înseamnă *significari principaliter*, atunci *categoremata* pot fi numite *significantia* = semnificativele și *syncategoremata* pot fi numite *consignificantia* = = consemnificativele".

Chiar Priscianus definește în tratatul său *syncategoremata*: *Partes igitur orationis sunt secundum dialecticos duae, nomen et verbum, quia hae solae etiam per se coniunctae plenam faciunt orationem, alias autem partes syncategoremata hoc est consignificantia appellabant.* Cu alte cuvinte, particulele *syncategoremata* nu sînt cuvinte „semnificative", ci cuvinte „consemnificative", care primesc un sens numai într-un context.

Thomas d'Aquino este chiar mai „categoric" în caracterizarea particulelor *syncategoremata*: „*Syncategoremata*, care prin ele însele nu reprezintă nimic precis, ci numai felul de a fi al cuiva sau al altcuiva. . .".

Sau cum se exprimă Duns Scotus: *Syncategoremata non sunt dictiones per se significantes.*

Locul acestor particule este evident nu numai în gramatică, dar și în logică și cu ele se face un gen special de predicație. Pentru a clarifica acest punct, ne vom adresa lui Abélard, care, în vastul său tratat *Dialectica*, arată apartenența acestor particule la problemele de care se ocupă logica. Cum vede el rolul acestor particule în propoziție? El atribuie particulelor *syncategoremata* capacitatea de a caracteriza, dar numai într-un chip particular, ceva analog cu caracterizarea prin care modalitățile (posibil, imposibil, necesar etc.) caracterizează propozițiile, ceea ce, în sfîrșit, se reduce la o modificare de fapt a lucrurilor. Iată textual ce scrie Abélard cu privire la acest subiect: „Ia seama că legătura gramaticienilor, pur « constructivă », este diferită de legătura atributivă pe care o au în vedere dialecticienii" (*Oeuvres choisies* de Abélard, traduse de M. de Grandillac, Paris, 1945).

Cu acestea, cele două roluri ale gramaticii și ale logicii sînt perfect delimitate: unul se referă la construcții corecte și celălalt la predicații corecte. Predicațiile făcute de *syncategoremata* fac deci obiectul logicii.

Abandonînd gramaticii problema particulelor *syncategoremata*, logica modernă a restrîns total cîmpul predicației și nu-i de mirare că tocmai prin predicații imprudente s-a ajuns la contradicții.

Să rezumăm cele spuse anterior: particulele *syncategoremata* pot fi privite sub două aspecte: 1. unul de construcție gramaticală corectă; 2. altul de atribuție corectă, și logica are rolul de a studia acest aspect.

Observații asupra problemei predicației în Evul Mediu

Problema predicației era în Evul Mediu mult mai vastă decît aceea a particulelor *syncategoremata*. În afară de interesul pur logic pentru această problemă, mai era și interesul tehnic de a se preciza în fiecare caz modul predicației, întinderea și valabilitatea sa, ca prin aceste precizіuni să se evite sofismele.

Începînd cu studiul proprietăților termenilor — *De terminorum proprietatibus* — logicienii scolastici au construit mai întîi teoria „supoziției", *suppositio* fiind acceptarea unui termen în locul altuia. S-a ajuns în această problemă la precizări uimitoare, care ar merita un studiu separat.

În afara teoriei *suppositio* și în strînsă legătură cu ea, găsim și alte probleme legate de predicație, anume „supoziția" termenilor relativi — *suppositio relativorum*, în fine teoria *ampliatio*, *appelatio* și *restrictio* și în special teoria *distributio*.

Ampliatio este o lărgire printr-o „supoziție" a unui termen comun și *restrictio* e o restrîngere printr-o „supoziție" a unui termen comun.

În fine, *appelatio* consistă în acceptarea unui concept ca și cum el ar reprezenta un lucru real existent: *appelatio est acceptatio termini pro se existente.*

Teoria *distributio* e și mai interesantă, și această noțiune e definită astfel: *distributio* e multiplicarea unui termen comun, realizată prin semnul universal *omnis*. De exemplu, cînd spunem *omnis homo*, termenul *homo* e „distribuit" sau e confundat cu oricare din termenii săi inferiori. Și e de remarcat că un termen singular nu poate fi „distribuit": *terminus singularis non potest distribui.*

Se vede că prin astfel de *suppositiones*, *significatio* unui termen poate fi accidental lărgită, restrînsă, interpretată cu o semnificație de existență sau chiar „distribuită" în mod eronat. Pentru a evita sofismele care decurg din „supoziții" eronate, logicienii scolastici au dat multiple reguli pentru fiecare caz. Toate regulile ajung în cele din urmă la regulile privind particulele *syncategoremata*, despre care vom vorbi imediat în detaliu.

Principalele syncategoremata și diviziunea lor

Înfățișăm acum aceste particule clasificate pe categorii, așa cum le găsim în manuscrisul lui Wilhelm de Shyreswood: *Syncategoremata magistri Guilelmi de Shireswood.*

Găsim mai întîi o diviziune generală în trei clase: 1. particulele plasate aproape de subiectul unei propoziții; 2. acelea care fac legătura între subiect și predicat; 3. în fine, cele care sînt plasate lîngă predicat.

Să ne ocupăm de toate aceste categorii.

1. Particulele *syncategoremata*, care sînt plasate lîngă subiectul unei propoziții:

A) Particule *distributives*:

a) afirmative:
omnis; *totus*, *infinitus*; *qualislibet*; *quantuslibet*; *uterque.*

b) negative:
nullus; *neuter.*

B) Particule *exceptives*: *praeter.*

C) Particule *exclusives*: *solus*; *tamen.*

2. Particulele *syncategoremata*, care fac legătura între subiect și predicat: *est*; *non.*

3. Particulele *syncategoremata*, care sînt plasate lîngă predicat: *necessario*; *contingenter*; *incipit* și *desinit.*

În afară de aceste particule, Wilhelm de Shyreswood enumeră şi alte *syncategoremata* care fac legătura între două subiecte, două predicate sau între două propoziţii, anume conjuncţiile:
1. consecutive: *si*; *nisi*; *quin*;
2. copulative: *et*;
3. *disiunctives*: *vel*; *an*; *ne*; *sine*.
Acestea sînt aşa-zisele constante logice sau functorii logicii matematice actuale.

Fără a intra în toate detaliile manuscrisului lui Shyreswood asupra tuturor acestor particule, vom spune numai ce ne pare esenţial în această problemă.

Începem printr-o chestiune prealabilă: de ce s-a dat o asemenea amploare studiului particulelor *syncategoremata*? În primul rînd, fiindcă era o chestiune de logică, şi toate problemele care se legau de logică erau studiate pînă în cele mai mici detalii, chiar aparent nesemnificative. Dar era şi un alt motiv, mai puternic, de a trata într-un mod exhaustiv această problemă: aceste particule, neavînd un sens propriu, autonom, primesc sensuri accidentale, care duc uşor, prin confuzia lor, la sofisme. Şi am văzut că sofismele sînt amplu analizate în tratatele epocii. Vom arăta acum mecanismul de principiu al acestor sofisme.

Aceste particule pot avea, în mod general, două sensuri: unul *categorematic* şi altul *syncategorematic*. Confuzia acestor două sensuri provoacă, natural, o eroare de raţionament.

Să luăm, de exemplu, particula nedeterminată *omnis*: cuvîntul „tot" poate fi luat într-un sens *categorematic*. Într-adevăr, *omnis* poate fi întrebuinţat în sensul pe care-l are în propoziţia *mundus est omne*, şi aici sensul este *categorematic*, *omne* avînd un sens prin el însuşi, fiindcă semnifică universalitatea lucrului pe care-l determină; dar, în propoziţia *omnis homo currit*, *omnis* semnifică numai dispoziţia subiectului, în măsura în care e subiectul unei acţiuni, şi deci aici particula este întrebuinţată într-un sens *syncategorematic*.

Să luăm acum un alt cuvînt interesant: *infinitus*. Iată constatările pe care le face Petrus Hispanus în *Summulae logicales* cu privire la diversele semnificaţii ale acestui cuvînt: „Infinitivul e luat în sens *categorematic* cînd e termen comun şi atunci înseamnă cantitatea lucrului subiect sau predicat; altfel, e luat în sens *syncategorematic*, cînd el nu spune cantitatea lucrului subiect sau predicat, ci numai în ce categorie (sau raport) se găseşte subiectul faţă de predicat; şi astfel nu este un termen comun, ci o dispoziţie a subiectului şi un semn distributiv". În sfîrşit, Petrus Hispanus dă următoarele reguli pentru a stabili semnificaţiile confuze ale cuvîntului *infinitus*.

1. Infinitul luat *syncategorematic* face ca termenul comun care-l urmează să fie confuz, ca în propoziţia *infiniti homines currunt*, unde termenul *homines* este întrebuinţat într-o manieră confuză şi este un semn distributiv *(signum distributivum)*.

2. Propoziţia în care cuvîntul *infinitus* este luat în sens *syncategorematic* este în fond o propoziţie copulativă, a cărei primă parte afirmă predicatul pentru un subiect, luat într-o oarecare cantitate continuă sau discretă, iar a doua parte neagă că predicatul ar aparţine subiectului după o cantitate determinată. De exemplu, în propoziţia *infiniti homines currunt* se află mai întîi propoziţia *aliqui homines currunt*, care vrea să spună că există într-adevăr

unii oameni care fug şi apoi introducerea particulei *infiniti* face ca predicatul să nu mai fie determinat.

3. A treia regulă se referă la *infinitus* luat în sens *categorematic* sau semnificativ şi care se exprimă printr-o propoziţie copulativă a cărei primă parte afirmă o cantitate a subiectului, iar a doua neagă limita acestei cantităţi, aşa ca în propoziţia *linea est infinita*, adică *linea est quanta et non habet terminum suae quantitatis*. Această formă apare dacă infinitul este în predicat. Dar dacă este în subiect, prima propoziţie afirmă predicatul drept cantitate a subiectului, iar a doua neagă limita acestei cantităţi, ca de exemplu în propoziţia *aliquod corpus infinitum est album*, adică un corp oarecare de o mărime oarecare este alb, şi acest corp nu are termen (sfîrşit) pentru cantitatea sa.

Sînt multe distincţii subtile pe care doctorii Evului Mediu le făceau între diversele sensuri ale cuvîntului „infinit", dar nu putem intra în detalii. Vom spune numai că, dacă acestea ar fi fost cunoscute de matematicienii contemporani, multe probleme nu s-ar mai fi pus.

Pe scurt, închidem analiza infinitului cu regula lui Paulus Venetus: *Infinitum tenet categorematice quando principale verbum determinare non potest; syncategorematice quando determinat.*

Tot astfel distingem două sensuri pentru celelalte *syncategoremata*. Să examinăm cîteva care intervin ca functori în logica matematică.

Nullus. Această particulă are cînd sensul unei diviziuni după genuri, cînd pe acela al unei diviziuni după numere.

Praeter. Această particulă, întrebuinţată astăzi de logicieni ca un functor special, „în afară de", are mai multe sensuri, anume: 1. un sens aditiv, ca în propoziţia: *sex viri sunt hic praeter magistrum*, un sens exceptiv, şi acesta de două feluri, cînd diminutiv, cînd momentan (instantiv), ca în propoziţiile: *Socrates habet undecim digitos praeter unum* (diminutiv) şi: *omnis homo praeter Socratem currit* (instantiv).

Să examinăm îndeaproape ultima propoziţie: se exceptează o parte a întregului predicat complet, fiindcă această propoziţie înseamnă că Socrate este exclus din acest tot *omnis homo* şi aceasta *non secundum rem sed ratione praedicati*, prin considerarea predicatului şi pentru aceasta particula *praeter* este aici o *syncategorema*.

Si. Sînt două situaţii pentru conjuncţia „dacă": ea arată cînd ordinea lucrurilor *secundum rem*, cînd ordinea lucrurilor *secundum sermonem*. În primul caz, *dacă* are sens *categorematic*, ca în propoziţia: *si Socrates currit, Socrates movetur;* în cel de-al doilea caz, *dacă* este o *syncategorema*.

Est. Copula este foarte discutabilă, şi logicienii Evului Mediu nu sînt complet de acord asupra faptului ca această particulă să fie considerată sau nu o *syncategorema*. Ideea îşi găseşte originea la Aristotel, care afirmase (*De Interpretatione*, 1, 21a) că „este" semnifică o oarecare compoziţie şi că fără compoziţie nu e posibil de înţeles. Cei ce credeau că „este" are un sens *syncategorematic* susţineau deci că afirmaţia lui Aristotel are sensul de *consignificare* şi *simul significare* şi că, prin urmare, aceasta primeşte un sens accidental, consemnificativ, şi deci *este* e o *syncategoremă*.

Ne oprim aici cu analiza particulelor *syncategoremata*. Adăugăm numai că fiecare *syncategorema* a fost complet analizată, sensurile ei diferite clasate şi se dădeau nenumărate sofisme drept exemplu pentru fiecare sens.

Operatorul „Omnis"

Ne vom ocupa acum mai îndeaproape de cuvîntul *omnis*, care e numit operatorul de generalizare, și care a dat loc unei crize profunde în logică și în matematică.

Cele două sensuri găsite de Petrus Hispanus pentru *omnis* sînt:

1. sensul *colectiv*, cînd are semnificația *universale*, ca în propoziția *omnes apostoli dei sunt duodecim* și cînd sensul lui *omnes* are puterea de a strînge într-o colectivitate pe toți apostolii, construind astfel clasa apostolilor;

2. sensul *distributiv*, ca în propoziția cu care începe *Metafizica* lui Aristotel: *omnes homines naturaliter scire desiderant*, și unde *omnes* „distribuie" predicatul *desiderant scire*, ceea ce s-ar putea traduce, în acest mod distributiv, prin echivalentul său corect: „Fiecare om dorește să cunoască într-un mod natural". Se vede că aici cuvîntul *omnis* nu-i întrebuințat *universale*, ci *universaliter* (adică adverbial, nu predicativ).

Dacă nu se ține seama de aceste diferențe de sens, se cade în sofisme bine cunoscute, ca paralogismul:

Omnes apostoli dei sunt duodecim;
Petrus et Jacobus sunt apostoli;
Ergo: Petrus et Jacobus sunt duodecim.

Eroarea consistă în faptul de a confunda sensul „colectiv" cu sensul „distributiv"; prin semnificația sa colectivă, din prima premisă, unde *omnes* e luat în sens *universale*, *omnes* formează clasa, dar, cum nu e „distributiv", el nu atribuie predicatul, *sunt duodecim*, la fiecare membru al ei.

În același fel, în propoziția „toți oamenii doresc să cunoască într-un mod natural", *omnes*, neavînd un sens „colectiv", nu formează o clasă, clasa tuturor oamenilor care ar avea proprietatea exprimată de predicat. Această clasă nu e formată, fiindcă *omnes* e luat aici în sens *universaliter*; *omnis* face doar ca un termen general să fie plasat în locul tuturor termenilor săi inferiori. Și atunci se întreabă Petrus Hispanus, ce semnifică acest semn *(signum) omnis*? Iată raționamentul său:

„S-ar părea că nu semnifică nimic, fiindcă orice lucru este universal sau particular, dar *omnis* nu semnifică nici un lucru universal, nici un lucru particular. Deci *omnis* nu e predicabil nici pentru unul, nici pentru mai mulți."

Găsim apoi și argumentația *contra*, așa cum era obiceiul pe atunci: „Dar dacă *omnis* nu semnifică nimic, a introduce acest cuvînt într-o propoziție sau a-l retrage nu poate să provoace adevărul sau falsul acestei propoziții; propoziția adevărată « *animal est homo* » nu trebuie să-și schimbe valoarea sa de adevăr prin introducerea particulei *omnis*, deci « *omne homo est animal* », ceea ce-i fals".

Soluția lui Petrus Hispanus constă în distingerea a două sensuri ale lui *omnis*, despre care am mai vorbit: sensul „colectiv", cînd cuvîntul *omnis* este întrebuințat în mod *universale* și cînd însuși sensul său creează o mulțime (o clasă); sensul „distributiv", cînd cuvîntul *omnis* este întrebuințat în sens universal — *universaliter* —, ceea ce face ca termenul comun de care e legat să fie plasat pentru toți termenii săi inferiori *(quia facit terminum communem suum stare pro omnibus suis inferiores)*.

Într-un mod analog explică celebrul logician și operatorul *nullus*, pe care-l reduce la echivalentul lui *omnis* cu negația plasată după: *nullus* = *omnis non*. De unde rezultă imediat că *nullus* urmează calea lui *omnis*.

Se vede deci, din cele ce precedă, că atitudinea logicienilor și matematicienilor contemporani a fost extrem de imprudentă cînd au nesocotit voit problema cuvîntului *omnis*, fiindcă se acceptă prin accident unul din cele două sensuri și se poate cădea ușor într-un sofism, dacă se ignorează aceste sensuri. O vom arăta imediat.

Paradoxul lui Burali-Forti și soluția sa scolastică

În examinarea problemei particulelor *syncategoremata* n-am avut doar un scop pur istoric; de altminteri, pentru acest motiv nici n-am intrat în toate detaliile problemei, ca și în cazul problemei *insolubilia*. Am voit numai să atragem atenția asupra soluției unei probleme de mare importanță și subtilitate, apărută în zilele noastre, aceea a paradoxelor logico-matematice, la care logicienii scolastici aveau deja răspunsul. Dar răspunsul lor e total necunoscut în zilele noastre. Logicienii Evului Mediu posedau soluția logică și simplă, care poate da deplină satisfacție intelectuală tuturor spiritelor, chiar celor mai pretențioase. Și această soluție rămîne soluția incomparabil cea mai inteligibilă, cea mai clară, cea mai simplă și, pentru aceasta, cea mai logică, am putea spune chiar cea mai aristoteliciană dintre toate soluțiile date pînă în prezent.

Paradoxul. Matematicianul italian Burali-Forti a publicat în 1897 o antinomie pe care a întîlnit-o în teoria mulțimilor. În articolul său *Una questione sui numeri transfiniti* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. XI), Burali-Forti a expus acest paradox utilizînd mijloace pur formale, adică aparatul logicii simbolice, așa cum era constituit la vremea aceea de Giuseppe Peano și școala sa.

Bertrand Russell îl formulează în *Principia Mathematica* (vol. I) în felul următor:

Se demonstrează în teoria mulțimilor că: 1. orice serie de numere ordinale definește un număr ordinal; 2. acest număr ordinal e mai mare cu o unitate decît cel mai mare număr ordinal al seriei considerate; 3. seria ordinalelor (în ordinea mărimii lor) e bine ordonată. Să considerăm acum seria tuturor numerelor ordinale; această serie definește un număr ordinal, să-l notăm Ω, care e cel mai mare dintre toate numerele. În acest caz, seria tuturor numerelor ordinale conține numărul ordinal Ω, și deci numărul ordinal definit prin această serie (a tuturor seriilor) nu este Ω, ci $\Omega + 1$. Contradicția este frapantă: dacă Ω este numărul ordinal definit prin seria *tuturor* ordinalelor, atunci Ω nu e numărul ordinal definit prin seria *tuturor* ordinalelor, ci $\Omega + 1$.

Soluție. Se poate rezolva acest paradox bazîndu-ne pe concepția scolastică a particulelor *syncategorematice.*

Să considerăm *toate* numerele ordinale posibile, definite mai sus prin seriile respective de numere ordinale. Pentru a evita această „jucărie logică", cum spunea Poincaré, să scriem pe o foaie de hîrtie propoziția:

(1) „Am considerat *toate* numerele ordinale posibile și afirmăm că n-am omis nici un număr ordinal, fiindcă numai cu această condiție avem dreptul să spunem că le-am considerat pe *toate*, și printre ele se găsește cel mai mare ordinal posibil, Ω".

Această propoziție (1) constituie, de altfel, angajamentul că n-avem intenția de a întinde vreo cursă cuiva, și nici nouă înșine.

Să enunţăm acum propoziţia:

2) „Să considerăm seria *tuturor* numerelor ordinale posibile, inclusiv Ω, cel mai mare ordinal; atunci această serie defineşte un alt număr $\Omega + 1$, cel mai mare ordinal, care nu e cuprins în seria *tuturor* numerelor ordinale posibile, determinată prin angajamentul (1)".

Contradicţia exprimată prin propoziţia (2) nu-i posibilă. Nu există vreun alt număr ordinal în afara *tuturor* numerelor ordinale considerate de propoziţia (1). Dacă am putea gîndi un alt ordinal, numărul $\Omega + 1$, atunci ar fi trebuit ca acesta să se afle deja printre *toate* ordinalele posibile, fiindcă, de data aceasta, nu considerăm că *toate* n-ar avea semnificaţia de *toate*. În acest caz, cel mai mare ordinal considerat de (1) ar fi $\Omega + 1$ şi nu Ω.

Prin urmare, în propoziţia (2) „să considerăm seria *tuturor* numerelor ordinale posibile, inclusiv Ω, cel mai mare . . .", cuvîntul *tuturor* nu are sensul „colectiv" sau „categorematic"; cuvîntul *tuturor* în propoziţia (2) nu poate avea decît sensul distributiv sau *syncategorematic* şi e luat *universaliter*. Propoziţia (2) are deci exact sensul: „Să considerăm fiecare din toate numerele ordinale posibile, inclusiv Ω, cel mai mare . . ." şi în această propoziţie termenul comun (numere ordinale) este plasat pentru toţi termenii săi inferiori fără a realiza o nouă serie care nu există conform angajamentului nostru (1)

Prin urmare, cuvîntul *toate*, întrebuinţat o dată în sensul său colectiv şi, adunînd *toţi* termenii săi inferiori într-o unitate închisă, nu poate fi întrebuinţat, relativ la aceiaşi termeni, într-un sens colectiv (sens epuizat prin prima întrebuinţare), ci numai în sens distributiv, în acelaşi fel în care *toţi* este întrebuinţat în propoziţia *omnes homines naturaliter desiderant scire*, termenul general fiind pus *(suppositum)* pentru fiecare element inferior, fără a le putea aduna într-un grup nou, fiindcă *omnes* nu are şi nu mai poate avea decît sens „distributiv".

Soluţia altor paradoxe

E de remarcat în soluţia scolastică a paradoxului lui Burali-Forti că aceasta e valabilă ca soluţie a tuturor paradoxelor „logice" construite cu *syncategorema „omnis"*. În acest scop reamintim propoziţiile principale ale acestor paradoxe.

a. *Paradoxul lui Cantor asupra celui mai mare număr cardinal.*

Fie M mulţimea *tuturor* mulţimilor şi Nc numărul său cardinal: Nc este cel mai mare număr cardinal posibil. Pe de altă parte, o teoremă bine cunoscută a teoriei mulţimilor spune: numărul cardinal al mulţimii *tuturor* sub-mulţimilor lui M este mai mare decît numărul cardinal Nc al mulţimii M! Contradiţia e frapantă.

Dar paradoxul dispare imediat dacă ţinem seama de sensul *syncategorematic* al lui *omnis*. Într-adevăr, să presupunem că am determinat *toate* mulţimile posibile; atunci nu mai există vreo altă mulţime în afara *tuturor* mulţimilor. Deci propoziţia „mulţimea *tuturor* mulţimilor" nu poate crea o nouă mulţime: operatorul *„toate"* are un sens distributiv, şi, prin urmare, această propoziţie semnifică „fiecare din toate mulţimile". Neexistînd mulţimea tuturor mulţimilor, nu există nici sub-mulţimile sale.

b. *Paradoxul lui Russell asupra mulţimii tuturor mulţimilor care nu se conţin ca element.*

Să formăm mulțimea *tuturor* mulțimilor care nu se conțin ca element și să căutăm dacă această mulțime se conține ca element sau nu; ajungem la o contradicție.

Vedem că și aici apare *syncategorema „omnis"*.

c. *Paradoxul lui Richard*

Paradoxul e bazat pe aceste două propoziții care definesc două mulțimi cu aceeași *syncategorema „omnis"*: „mulțimea *tuturor* numerelor reale care pot fi exprimate printr-un număr finit de cuvinte". Nu mai e nimic de adăugat.

d. *Paradoxul lui Zermelo-König*

Acest paradox e bazat pe aceste două propoziții care definesc două mulțimi cu aceeași *syncategorema „omnis"*:

„mulțimea *tuturor* numerelor reale care pot fi exprimate printr-un număr finit de cuvinte";

„mulțimea *tuturor* celorlalte numere".

e. *Paradoxul lui Skolem*

Această antinomie apare într-o axiomatizare a teoriei mulțimilor care ar trebui să ne conducă la existența unei „mulțimi infinite Z și a unei mulțimi UZ a *tuturor* sub-mulțimilor lui Z". Aici apare o dublă imprudență a matematicienilor cu privire la două *syncategoremata: infinitus* și *omnis*.

f. *Paradoxul lui Gödel*

Deși paradoxul lui Gödel are un alt aspect, care îl apropie mai curînd de antinomia mincinosului (observație făcută de Hilbert și Bernays în lucrarea lor *Grundlagen der Mathematik*), se află cel puțin o propoziție în teoria sa care conține în același timp două *syncategoremata*.

Într-adevăr, propoziția centrală a teoriei lui Gödel este bazată pe definiția unei clase K, definită astfel: clasa K este clasa *tuturor* numerelor naturale n pentru care formula $[R(n)\,;\,n]$ este nondemonstrabilă.

Nu intrăm în detaliile acestei chestiuni pentru a explica formula $[R(n)\,;\,n]$, fiindcă ceea ce interesează aici este faptul că paradoxul e construit cu două *syncategoremata: omnis* și *non*. Aceasta ar fi de ajuns pentru a explica apariția paradoxului, dar facem și o observație suplimentară; chiar verbul „a demonstra" poate avea semnificații „categorematice" și „syncategorematice". Într-adevăr, am văzut că conjuncția *dacă* și verbele *incipit* (începe), și *desinit* (încetează, sfîrșește) sînt „semnificative" și „consemnificative" și scolasticii au dat multe exemple pentru a arăta sensurile lor diferite. Se poate vedea, în mod similar, că verbul „a demonstra" nu poate avea mereu același sens. Evident, a demonstra o propoziție de geometrie este altceva decît a demonstra o tautologie logică sau, mai ales, de a demonstra o propoziție empirică. Mai mult, Gödel consideră cuvintele „demonstrabil" și „nondemonstrabil" ca predicate pe care le putem atribui propozițiilor, ceea ce-i lipsit de sens. Dacă propoziția demonstrabilă ar avea ca predicat cuvîntul demonstrabil, predicat pe care l-am putea distinge ca atare examinînd semnele constitutive ale propoziției sau celelalte proprietăți ale propoziției, în mod evident altele decît demonstrația sa propriu-zisă, atunci propoziția ar fi adevărată sau falsă fără demonstrație, cu alte cuvinte propoziția este demonstrată fără demonstrație, ceea ce-i absurd.

IV. CONCLUZII GENERALE

Am trecut în revistă problemele paradoxelor în Evul Mediu și soluțiile lor, făcînd aplicații la paradoxele logico-matematice contemporane. Știm că acestea au fost împărțite în două clase de către F. P. Ramsey, în cartea sa *Foundations of Mathematics* (Londra, 1931, anume: A) antinomiile care sînt construite cu noțiuni matematice și logice, ca acelea de mulțime (sau clasă) și de număr și care apar cu necesitate în orice sistem matematic sau logic; B) antinomiile în care se găsesc referințe asupra gîndirii, limbajului sau asupra simbolismului și care pot fi neglijate, fiindcă nu-i pericol ca ele să apară într-un sistem matematic sau logic.

Cele două grupe de antinomii au fost numite, respectiv, antinomii logice și antinomii semantice. Am văzut însă că această distincție fusese făcută chiar de Aristotel, care precizase că aceste antinomii au aceeași soluție.

Din analiza precedentă rezultă că pretinsele paradoxe logice (paradoxul lui Burali-Forti, al lui Russell, Cantor, Skolem, Zermelo-König) sînt rezolvate prin teoria particulelor *syncategoremata* a logicienilor scolastici. Dar teoria noastră a arătat că și paradoxul lui Richard, care e considerat ca o antinomie semantică, precum și paradoxul lui Gödel își găsesc soluțiile lor cu ajutorul aceleiași teorii; de unde rezultă că împărțirea în antinomii logice și semantice este fictivă. Această împărțire poate fi considerată ca o simplă indicație a domeniului în care ele pot fi întîlnite, dar din punct de vedere logic ele au aceeași soluție, exact așa cum afirmă Stagiritul.

Un singur paradox n-a fost rezolvat în mod satisfăcător de logicienii Evului Mediu: paradoxul mincinosului. Am văzut însă că ei au găsit tot ceea ce au imaginat logicienii contemporani și chiar mai mult, fără ca totuși să dea o soluție satisfăcătoare.

N-am intenționat să dăm aici soluțiile tehnice ale paradoxelor, am vrut să arătăm numai pînă la ce punct au făcut logicienii scolastici să avanseze soluția acestor probleme. Un lucru e cert: dacă teoria mulțimilor ar fi apărut în Evul Mediu, paradoxele generate de ea n-ar mai fi constituit o dificultate.

Cum se explică faptul bizar că, deși mecanismul logic al paradoxelor este același, și ele fiind deja rezolvate prin teoria particulelor *syncategoremata*, n-a fost găsită — *ipso facto* — și soluția pentru „mincinos"? Nu-i decît o singură explicație: mecanismul logic al paradoxelor se găsește la un nivel logic mai general, mai înalt decît acela unde funcționează distincțiile predicative ale particulelor *syncategoremata*. Am văzut că toate aceste particule primesc sensuri accidentale. Ceea ce este deci comun la toate aceste *syncategoremata* e că, datorită lor, avem în propoziție o predicație accidentală, și logicienii scolastici au accentuat acest fel de atribuție, făcînd chiar o distincție între *praedicatio accidentalis* și *praedicatio essentialis*. Credem că pe această cale trebuie căutată soluția generală a tuturor paradoxelor, inclusiv aceea a „mincinosului". Într-adevăr, o predicație accidentală poate foarte bine fi constatată, legitim permisă, dar ea nu poate defini nimic; în momentul cînd ne servim de o propoziție exprimînd o predicație accidentală, obiectul definit printr-o astfel de propoziție nu este definit și deci aici nu avem o predicație.

Există totuși în epoca noastră cel puțin doi matematicieni care au avut intuiția acestei idei, fără să fi făcut nici o aluzie la logica Evului Mediu: unul este Richard, celălalt Poincaré.

Jules Richard, în articolul său *Les Principes des mathématiques et le problème des ensembles (Revue générale des Sciences pures et appliquées*, vol. 16, 1905*)*, după ce a construit paradoxul care-i poartă numele, îi dă şi soluţia. El arată că mulţimea *tuturor* mulţimilor definite printr-un număr finit de cuvinte nu este definită, fiindcă n-ar putea fi decît printr-un număr infinit de cuvinte. E ceea ce am spus mai sus.

Pe de altă parte, Henri Poincaré, examinînd soluţia lui Richard în *Science et méthode* (Paris, 1908), se declară de acord cu el şi scrie: „Astfel, definiţiile care trebuie privite ca nonpredicative sînt acelea care conţin un cerc vicios". Celebrul matematician sesizase esenţialul problemei, dîndu-şi seama că nu există predicaţie în aceste probleme, fără ca totuşi să o fi exprimat într-un mod tehnic-logic.

Observaţiile acestea ne par fundamentale pentru soluţia unică a tuturor paradoxelor prin metoda predicaţiilor accidentale, pe care am menţionat-o mai sus. Dar lucrul acesta l-am făcut în altă parte.* Credem totuşi că am atras suficient atenţia asupra interesului pe care-l prezintă, pentru logică în general şi pentru problema paradoxelor în special, cunoaşterea acestor două teorii scolastice, a problemei *insolubilia* şi a particulelor *syncategoremata*, cărora nu li s-a dat destulă importanţă în zilele noastre.

Revue Roumaine des Sciences Sociales, série de Philosophie et Logique, 3,Bucureşti, 1965.

* Vezi mai departe în volum: *Problema paradoxelor logico-matematice.*

Gradele de libertate ale determinismului

Evoluția științelor fizice în ultimele decade, a cărei rapiditate este mai mult decît surprinzătoare, a repus în discuție conceptele fundamentale ale acestor științe. Această dezbatere a început în lumea științifică treptat, pe măsură ce progresau cercetările în domeniul subatomic, unde s-a constatat că ideile noastre familiare, ca și intuițiile noastre obișnuite nu ne mai ajută în interpretarea acestui domeniu. Noțiunile de determinism, de cauzalitate și chiar de individ pierd sensul lor cunoscut și domeniul subatomic rămîne, în fond, guvernat în mod exclusiv de calculele de probabilitate.

Relațiile de incertitudine ale lui Heisenberg, trasînd o limită exactitudinii cunoștințelor noastre fizice, pun în același timp o barieră intuiției noastre, care nu poate fi depășită, tot așa cum fluviul Styx nu putea fi depășit de Jupiter.

Există, în timpul nostru, „deterministi" și „nedeterministi", de exemplu indeterministii școlii de la Copenhaga — N. Bohr, W. Heisenberg etc., și există de asemenea deterministi, și chiar „indeterministi" apostați, cum este Louis de Broglie. Diferențele care opun aceste două partizi ne pare că se datoresc unei înțelegeri greșite, provocată de o idee prea elementară despre determinism, acceptată așa cum a fost ea moștenită de la Antichitatea greco-romană, fără să fie supusă nici unei analize critice.

În cele ce urmează, vom examina mai îndeaproape ideea de determinism, a cărei clarificare va arăta că tocmai această idee familiară, am putea spune chiar naivă, adică intuitivă, despre determinism, este cauza acestor dispute.

Să vedem ce se înțelege în general prin determinism. A. Eddington citează trei definiții ale determinismului, care par într-adevăr să epuizeze tot ce se înțelege de obicei prin acest nume.* Prima definiție este aceea dată de Laplace în celebrul pasaj din lucrarea sa *Essai philosophique sur les probabilités*: „Trebuie deci să privim starea prezentă a Universului ca efectul stării sale anterioare și ca, în același timp, cauză a celei care va urma. O inteligență care, pentru un moment dat, ar cunoaște toate forțele de care natura este animată și situația respectivă a elementelor care o compun, și dacă ar fi destul de vastă pentru a supune aceste date analizei, ar cuprinde în aceeași formulă mișcarea celor mai mari corpuri din Univers și acelea ale celui mai ușor atom; nimic n-ar fi incert pentru ea, și viitorul, ca și trecutul, ar fi prezente pentru ea."

* *Nouveaux sentiers de la science*, p. 96 (Hermann, Paris, 1936).

Noi considerăm această definiție ca fiind de natură metafizică și ea poate fi găsită la toți oamenii de știință clasică. Dar ea conține o extrapolare necorectă, căci extinde facultățile unei inteligențe finite la o inteligență infinită. Marcel Boll scrie, referindu-se tocmai la această ființă „dotată cu facultăți nelimitate": „Ansamblul psihologiei conduce la a afirma că inteligența crește în același sens cu complexitatea sistemului nervos, de la ființele cele mai elementare, pînă la om. Dar dincolo de acesta? Avem noi dreptul de a extrapola? Noi nu vom putea decide dacă inteligența crește dincolo de om, sau dacă curba nu trece dintr-un maximum, în așa fel că o complexitate infinită a unui sistem nervos ar conferi posesorului său o inteligență nulă." [1]

Mecanismul acestei asimilări nelimitate și nejustificate, în ceea ce privește ființa fantastică a lui Laplace, constituie de altfel o proiecție psihologică în lumea exterioară a omului de știință, a propriului său eu, obișnuită și aproape inconștientă pentru el. În acest caz, ne imaginăm că efectul decurge din cauza sa, chiar mai mult, că el este secretat de cauza sa, de aceeași manieră în care noi am face ceva. Dacă constatăm numai că anumite lucruri sau anumite evenimente sînt în legătură, ne grăbim să decretăm că unele sînt cauzele celorlalte și în acest caz aplicăm, fără să știm, o schemă antropologică, după care imaginăm cauza unui fenomen sau unui lucru, în același fel cum un om este cauza lucrului făcut de el.

Determinismul și cauzalitatea sînt așa de strîns întrepătrunse, că nu se face în general nici o distincțiune între ele.

Dar această confuzie a fost criticată în mod judicios de Ph. Frank: „Legătura cauzală nu este singura posibilă, dar ea are o importanță practică" [2]. Și Frank ajunge la ființa perfectă de care vorbea Laplace, care ar cunoaște tot: „Cînd gîndim că toate legile naturale sînt cauzale, aceasta nu ar avea sens decît dacă aceste legi ar exista în afara și deasupra inteligenței omenești."

Astfel, determinismul, conceput ca simplu lanț cauzal al fenomenelor, este o concepție metafizică, din acelea pe care știința le numește „lipsite de sens".

Conflictul născut din problema determinismului este deci o consecință inevitabilă a conceperii sale vagi, datorat unei metafizici naive, pe care experiența nu putea întîrzia de a o infirma.

Să trecem acum la a doua definiție, citată de Eddington. Ea este enunțată de către un poet veritabil, poetul *Rhubayatelor*, Omar Khayyam:

„Cu prima Argilă a pămîntului ei au făcut Ultimul Om
Și ei au semănat Grăuntele Ultimei recolte
Și prima Dimineață a Creației a scris
Ceea ce va citi Ultima auroră a zilei Judecății din Urmă".

Această definiție a determinismului este privită de către Eddington ca definiția sa *standard* și el explică preferința sa astfel: „Fără nici o indoială, aceste cuvinte exprimă ceea ce noi avem în spirit cînd ne gîndim la determinism. Cînd spunem că universul fizic, așa cum este reprezentat în prezent, nu este universul unde *prima dimineață de creație a scris ceea ce va citi ultima auroră a zilei judecății de apoi*, noi arătăm în mod clar că abandonarea deter-

[1] M. Boll, Prefață la studiul lui Carnap: *La Science et la métaphysique devant l'analyse du langage* (Hermann, Paris, 1936).

[2] Ph. Frank, *Le Principe de causalité et ses limites* (Ed. Flammarion, Paris, 1937).

minismului nu este o șicană tehnică, ci o schimbare radicală de punct de vedere."

Prin aceasta, Eddington confirmă ceea ce am spus la începutul acestui studiu: ideea de determinism (în sens clasic) se datorește unei acceptări lipsite de orice control logic, definită de o manieră simplistă, sau mai bine, nedefinită, „pe care o avem în minte cînd ne gîndim la determinism".

Să trecem, în fine, la a treia definiție citată de Eddington, și care se datorește filosofului C. D. Broad: „*Determinismul* este numele dat doctrinei următoare. Fie S o substanță, ψ o caracteristică și t un moment. Să presupunem că S este de fapt în starea σ în raport cu ψ și t. Este atunci imposibil de-a face această dublă ipoteză că tot restul Universului ar fi putut fi exact ceea ce el era în mod efectiv, și că S, din contră, ar fi putut lua una din celelalte două stări posibile în raport cu ψ. (Cele trei stări posibile — σ fiind una din cele două — : a avea caracteristica ψ, a nu o avea, și a fi în curs de a o schimba.)"

Eddington nu acordă mare credit definiției lui Broad, care, după el, ascunde o capcană. Dar definiția lui Broad nu spune alt lucru, decît că un element oarecare din univers are o funcție precisă în mijlocul realității fizice. Ea nu face nici o aluzie la natura acestei funcționalități. Definiția lui Broad este o concepție mai justă a determinismului; ceea ce i se poate reproșa este că nu ține cont de natura experienței, care nu este niciodată exactă în sensul teoretic al cuvîntului. Pentru Broad, un element este o rotiță angrenată în mecanismul horologeriei universului, o piesă avînd rolul său precis și în mod exact stabilit în funcționarea acestui mecanism. Dar el știe că nu va ajunge niciodată să cunoască cu precizie absolută funcționarea exactă a acestui element în univers. Deci concepția determinismului lui Broad presupune că în realitate lucrurile se petrec exact, dar numai observatorul le cunoaște în mod aproximativ, poziție care nu are un caracter științific. Afirmația că există o astfel de înlănțuire perfectă între elementele universului depășește informația experienței și constituie în fapt o *idealizare* platonică a ideii determinismului, la care ar participa într-un mod imperfect lucrurile materiale. Definiția lui Broad, mai corectă decît aceea a lui Laplace sau aceea a lui Omar Khayyam, trebuie să primească un amendament pentru a avea un sens fizic (pentru că ea are un sens metafizic).

Să explicităm definiția lui Broad: să considerăm un element x; starea sa în momentul t depinde de starea universului în momentul t. Cu alte cuvinte, starea elementului x la un moment dat este în funcție de starea universului la acest moment: $x = f(U)$, deci x este în funcție de univers. Dar, fiindcă orice funcție a unei variabile poate fi considerată de asemenea ca funcție inversă, chiar dacă noi nu putem s-o explicităm, rezultă că U depinde el însuși de x, ceea ce nu este altceva decît considerația raportului invers de dependență funcțională între x și U. Altfel spus, dacă x este funcție de o variabilă U, atunci variabila U este ea însăși funcție de x. Așadar, $x = f(U)$ implică $U = \varphi(x)$, respectiv:

$$x = f(U) \rightarrow U = \varphi(x).$$

Această concluzie, cu toate că pare paradoxală la prima vedere, nu este decît consecința imediată a oricărei definiții a determinismului care afirmă că starea unui element x al universului depinde de însăși starea universului. Este evident că oamenii de știință nu au în minte această idee, ci

numai dependența lui x față de variabila U, dar dependența $U = \varphi(x)$ este în mod implicit enunțată în definiția lui Broad, sau în alte definiții analoage.

Este evident, acum, că definițiile determinismului, chiar cele care au o formă mai controlată, nu pot fi acceptate, fiind mai degrabă idei simpliste, moștenire a unei metafizici naive sau populare. Determinismul nu poate fi conceput sub forma unui angrenaj ale cărui piese sînt perfect îmbinate. Fenomenele și obiectele pot fi grupate în familii, genuri, clase, sisteme, galaxii. Un element oarecare x are un oarecare rol în familia sa particulară, dar are un rol complet diferit în universul din care el face parte. El nu intervine direct decît în familia de elemente care îl înconjoară imediat, și nu intervine în univers decît prin intermediul acestei familii considerate ca individ. Dacă Becquerel spune că atunci cînd el mișcă degetul său, gravitația pe Sirius a suferit o schimbare, el enunță exact determinismul naiv al definițiilor citate mai sus, după Eddington. El exagerează cînd crede că există o legătură directă între degetul său și steaua Sirius, căci Sirius nu ia contact cu degetul său decît prin sistemul solar; numai în cazul cînd mișcarea degetului lui Becquerel schimbă ceva în sistemul solar se poate vorbi de o schimbare eventuală pe Sirius. Dar, aceeași problemă se pune relativ la raportul degetului lui Becquerel cu Soarele: nu este un raport direct.

Cînd Becquerel ridică degetul său, el schimbă ceva în fluxul electromagnetic imediat vecin cu degetul; acesta rămîne, luat global, același, pentru că nimic nu se creează, nimic nu se pierde și, în consecință, nu se poate vorbi de o modificare a fluxului electromagnetic terestru, și cu atît mai puțin a unei modificări a gravitației pe Sirius. Astfel, determinismul unui lucru se întinde individual pînă la o oarecare limită, numai dincolo de care cîștigă o anumită libertate, și nu mai contează decît prin grupul din care face parte.

Undele făcute la suprafață de apele unui lac, de cîte o piatră, se întind pe o distanță oarecare, și dincolo de această distanță apa lacului doarme liniștită, fără nici o legătură cu faptul considerat. În consecință, Broad nu are în întregime dreptate cînd afirmă că „este imposibil de-a face această dublă ipoteză, că tot restul universului ar fi putut fi exact ceea ce el era în mod efectiv, și că S, din contră, ar fi putut lua una din celelalte două stări posibile". Degetul lui Becquerel nu schimbă nimic pe Sirius și aceasta nu pentru că acțiunea sa este prea mică sau neglijabilă, dar pentru că ea nu există, în fapt, decît pînă la o oarecare limită. Determinismul enunțat de Broad este un determinism absolut și poate avea loc într-un domeniu foarte restrîns, care poate fi numit *determinismul de ordinul zero sau fără nici un grad de libertate.*

Apoi, mai găsim un *determinism de primul ordin, cu un singur grad de libertate,* cînd un element oarecare, cu toate că este supus unui determinism riguros în cadrul unei aceleiași familii, într-un grup mai vast cîștigă un grad de libertate, starea sa putînd fi schimbată, fără ca universul să remarce această schimbare sau, pentru a vorbi în limbajul lui Broad, universul rămînînd același. Și, la fel, găsim un *determinism de ordinul al II-lea, cu două grade de libertate* etc. Putem astfel concepe natura constituită dintr-un angrenaj perfect, rămînînd totuși în ipoteza deterministă, piesele angrenajului îmbinîndu-se cu precizie și gradele de libertate ale acestor piese ar permite tocmai jocul și mișcarea acestui angrenaj.

Ceea ce Broad nu menționează în definiția sa este, de exemplu, că un electron nu are același rol funcțional în univers ca acela pe care îl are un

astru sau o nebuloasă. Determinismul depinde de chiar elementul considerat și de elementele între care el funcționează. Alta este legătura între doi atomi ai aceluiași arbore, de exemplu, și alta este legătura între doi atomi, unul la București și altul la Roma.

Funcțiunea determinismului este mult mai complicată decît o formulase știința clasică, care o voia simplă și liniară, așa cum o vedea concepția simplificatoare a simțului comun.

Rezultă, din cele expuse, că fiecare element are determinismul lui particular, după rolul pe care el îl joacă în universul întreg. Dar acest rol îi acordă o libertate funcțională specifică în mecanismul naturii. Fiecare corp individualizat are astfel determinismul său, care depinde de „personalitatea" sa, ceea ce ne autoriză a spune că el are „destinul său". Nu există deci „determinism în general", ci „determinisme", funcții particulare ale elementelor care constituie universul, care pot să aibă unele grade de libertate. Sensul determinismului cu un grad de libertate și acela al determinismului cu două grade de libertate, de exemplu, sînt două lucruri diferite, două noțiuni diferite, care indică comportamente fizice diferite. Așadar, nu putem vorbi de determinism ca de o singură legătură generală între elementele universului fizic cunoscut, ci ca de funcțiuni particulare ale lucrurilor, de destine individuale, care depind de chiar natura acestor lucruri.

Este deci evident că ecuațiile diferențiale care exprimă legăturile dintre elementele universului trebuie să conțină diferiți parametri arbitrari, în raport cu numărul de grade de libertate ale elementelor considerate. Cînd fac aici un gest, nimic nu se schimbă pe Sirius, și aceasta nu pentru că la o astfel de distanță acțiunea mea este neglijabilă — ar fi un mod naiv de a exprima lucrurile — , ci pentru că degetul meu are mai multe grade de libertate în raport cu Sirius, și în cadrul acestei libertăți eu pot face gestul fără ca nimic să se schimbe pe acest astru. În același fel, cînd voim să urmărim evoluția unui electron cu ajutorul unui microscop, trebuie să ne așteptăm la unele libertăți ale electronului în raport cu microscopul — și aceasta din principiu, pentru că el nu face parte din aceeași familie de elemente ca aparatul nostru. Electronul poate „să-și permită" unele gesturi libere în raport cu microscopul, fără ca nimic să se schimbe, la fel cum degetul lui Becquerel nu schimbă nimic pe Sirius, prin mișcarea sa.

În acest mod, aproximațiile, incertitudinile, probabilitățile introduse astăzi de către știință nu exprimă un oarecare grad al ignoranței noastre, sau de incertitudine subiectivă a observatorului, ci perceperea unor stări ontologice diferite, avînd o natură diferită, și prin aceasta o funcție diferită în natură. Cel mai mic element al universului are un determinism absolut, în raport cu elementele aceleiași familii cu el, dar el cîștigă un grad de libertate în raport de elementele care nu fac imediat parte din familia sa în timp și spațiu și capătă mai multe grade de libertate în raport cu alți indivizi care aparțin altor familii în timp și în spațiu, pînă cînd el cîștigă un număr imens de grade de libertate, în raport cu cea mai mare familie, universul. Cu toate că ar putea să pară paradoxal, din cele spuse rezultă că, cu cît un element al universului este mai important, cu atît mai mult libertatea sa diminuează și, la limită, universul însuși, considerat ca unitate, este perfect determinat în raport cu părțile sale. De aici urmează că relațiile deterministe dintre elementele universului nu sînt simetrice, adică aceste elemente nu pot fi schimbate între ele în funcțiunile lor. Elementele legate prin relația deter-

minismului nu sînt comutative decît în interiorul unei aceleiași familii. Cind enunțăm legea lui Newton, determinismul înțeles în spiritul acestei legi nu face nici o distincție între rolurile particulare dintre funcțiile diferite ale corpurilor celeste în raportul lor reciproc. După cum s-a văzut, însă, una dintre erorile determinismului conceput în mod clasic este aceea că el nu face, niciodată, nici o distincțiune între elementele care se determină reciproc. Noi am văzut: dacă elementul x este în funcție de univers, $x = f(U)$, dar nu și invers, $U = \varphi(x)$, universul nu este funcție de elementul x, pentru că această relație nu este simetrică. Aparența de simetrie între elementele universului este provocată de concepția naivă a determinismului, aceasta distribuind roluri funcționale identice lucrurilor celor mai diferite, care au, în mod evident, „destine" diferite.*

Scientia, vol. 7–8, Milano, 1966.

* *Notă* (din 1985). Dezbaterile asupra determinismului și indeterminismului și legătura lor cu cauzalitatea aduc la iveală mereu noi nuanțări și preciziuni. Problema a fost promovată mai ales de faptul că în domeniul microfizic nu avem decît o cunoaștere probabilistică.

O dezbatere întreagă a fost închinată acestei probleme sub titlul *Determinism și indeterminism*, la care au participat unii dintre cei mai mari fizicieni contemporani și teoreticieni ai fizicii: W. Heisenberg, O. Costa de Beauregard, A. Matveev, J. Ulmo, B. d'Espagne, J. P. Vigier, D. Dubarle, J. L. Destouches. Această dezbatere a fost publicată în volumul *Science et Synthèse* (Gallimard, Paris, 1967), volum apărut și în limba română sub titlul *Știință și sinteză* (Editura Politică, 1969). În această lucrare cititorul poate găsi o serie de discuții utile pe marginea ideii de determinism. Voi cita numai afirmația lui Heisenberg (trad. rom., p. 245): „Termenii de *determinism și nedeterminism* pot fi utilizați în diverse feluri și deci sensul lor nu este foarte bine definit".

Definiție și existență

I. DEFINISABIL ȘI GÎNDIBIL

Cum definim? Iată întrebarea care va face obiectul studiului nostru. Nu vom încerca să descriem toate tipurile de definiție, deoarece nu acesta este scopul acestor pagini. Sînt într-adevăr mai multe feluri de definiții: nominale, reale, implicite, explicite, prin recurență, definiții *in use* etc. (Le putem găsi, de exemplu, în lucrarea lui W. Dubislav, *Die Definition*, Leipzig, 1931.) Noi vom insista aici îndeosebi asupra *condițiilor* definiției, așa cum le găsim menționate în tratatele de logică tradițională. Iată o listă a acestor condiții:

1) Definiția trebuie să se facă prin *genus proximum* și *differentia specifica*.

2) Definiția se face prin caractere esențiale și nu prin accidente.

3) În orice definiție trebuie să existe posibilitatea de a substitui definisantul, definitului — *definiens* lui *definiendum* (Condiția pascaliană).

4) Definiția trebuie să convină întregului definit și numai definitului — *toto et soli definito*.

5) O definiție nu trebuie să fie construită *idem per idem*, ea nu trebuie să fie tautologică. Nu se poate defini definitul prin definit — *definiendum per definiendum*. O formă mai dezvoltată a definiției *idem per idem* este *circulus in definiendo* sau *diallela*: un lucru este definit printr-un altul, dar fiecare din ele este definit prin elementele celuilalt.

6) O definiție nu trebuie să conțină o contradicție, nici o *contradictio in terminis*, nici o *contradictio in adjecto*.

Vom spune de la bun început că aceste condiții sînt necesare, dar nu și suficiente pentru ca să avem într-adevăr o definiție. Este posibil, de exemplu, ca o propoziție prin care vrem să definim să nu fie construită *idem per idem* sau să nu fie o contradicție și totuși să nu fie o definiție.

Sint două feluri de definiții eronate care nu respectă regulile necesare (dar nu suficiente) pentru construirea unei definiții:

1°. *Definițiile eronate, prin care noi gîndim ceva, dar acest ceva nu este specific și propriu conceptului definit (deși îi convine).*

De exemplu, propoziția „cercul este o curbă plană" este o definiție eronată, ea nerespectînd regula nr. (4) menționată, și în consecință nu convine *toto et soli definito*. Ea este o propoziție adevărată, dar ca definiție este eronată pentru că nu identifică cercul printre celelalte curbe plane.

2°. *Definițiile eronate prin care noi nu gîndim nimic.* De exemplu, definiția *idem per idem* „numărul 2 este ceea ce noi gindim prin cifra 2" nu spune absolut nimic, fiind o tautologie. Prin așa-zisa definiție precedentă

noi nu am gîndit absolut nimic. Și în acest caz propoziția enunțată este adevărată, ea fiind identitatea:

$$2 = 2,$$

dar ca definiție ea nu spune nimic și noi nu gîndim nimic în momentul cînd credem că este într-adevăr o definiție. Același lucru se întîmplă cu definiția „4 nu este 4"; această propoziție este falsă, dar, dacă o considerăm ca definiție, noi nu gîndim nimic asupra naturii numărului 4.

Ne vom ocupa mai de aproape, în cele ce urmează, de a doua categorie de definiții eronate, acelea care sînt absolut nule ca definiții.

Observație. Logica simbolică a considerat ca inutile regulile clasice ale definiției. Russell, în *Principia Mathematica*, spune că „definiția nu este definisabilă și nu este nici măcar un concept definit". „O definiție, spune el, este o declarație că un oarecare simbol sau combinație de simboluri nou introduse trebuie să însemne același lucru ca și o oarecare altă combinație de simboluri al cărei sens este deja cunoscut" (vol. I, p. 11, 1910). Din aceeași lucrare mai cităm și următoarea explicație: „Trebuie să observăm că o definiție nu este, strict vorbind, o parte a subiectului în care ea apare, căci o definiție se referă în întregime la simboluri și nu la ceea ce acestea simbolizează." Ce sînt atunci definițiile? După Russell, definițiile nu sînt necesare, din punct de vedere teoretic, *definiens* putînd întotdeauna fi utilizat în locul lui *definiendum* (*op. cit.*, p. 12). „Definițiile sînt, strict vorbind, [. . .] simple convenții tipografice", spune el. Cu toate acestea, deși le găsește din punct de vedere teoretic „superflue", Russell crede totuși că definițiile aduc adeseori mai multe informații decît conțin propozițiile în care ele sînt folosite.

Este adevărat că unii autori au căutat să controleze într-o oarecare măsură definiția și să elimine arbitrariul ei, care apare în sistemele logico-formale. De exemplu, R. Carnap a dat cîteva reguli pentru definiții (în *Logical Syntax of Language*, New York, 1937). Dar dacă definiția rămîne o abreviere *(Abkürzung)*, cum crede Carnap, toate aceste reguli sînt, în fond, foarte puțin. Nu dorim să intrăm într-un examen mai amănunțit al naturii definiției în logica matematică. Ceea ce ne interesează aici este faptul că, așa cum este ea concepută, definiția nu ține cont de condițiile amintite. Vom mai cita totuși un matematician francez, Arnaud Denjoy.

În *L'Enumération transfinie* (vol. IV, *Notes sur les sujets controversés*), A. Denjoy distinge: ceea ce poate fi gîndit, ceea ce poate fi definit, ceea ce există. El analizează ideea de „a gîndi", și conchide: „A gîndi un obiect concret înseamnă să preluăm din propria noastră memorie, să fixăm în atenția spiritului nostru una sau mai multe imagini relative la acel obiect și, prin ea singură sau prin reuniunea lor, să-l caracterizăm pentru cunoașterea noastră. A gîndi o specie înseamnă să gîndim unul sau mai multe exemplare cunoscute de noi, desprinzînd imagini sintetice care să identifice pentru spiritul nostru acești indivizi, trăsăturile desprinse arătînd incluziunea lor în specie". În sfîrșit, Denjoy analizează ce înseamnă „a gîndi o operație". După ce a considerat în toată generalitatea operația de a gîndi, autorul trece la examinarea a ceea ce poate fi gîndit în matematici. El ajunge la o primă concluzie pe care o enunță astfel:

„În toate studiile al căror subiect se referă la aritmetică, algebră sau analiză, și în ciuda iluziilor contrare pe care le poate crea folosirea simbolismului în teoriile generale, materialul elementelor numerice efectiv gîndite

de către om se compune numai, și se va compune totdeauna, dintr-un număr finit de numere întregi".

Trecînd la analiza definisabilului, Denjoy remarcă cu justețe: „Multe paradoxe din cele mai cunoscute din teoria mulțimilor se bazează, de fapt, cînd pe echivalența diverselor accepțiuni acordate cuvintelor ca *a defini*, *numerabil* etc., cînd pe premisa, pusă ca evidentă, a unui postulat fals".

Analizînd mai departe noțiunea de definiție, el găsește o condiție *sine qua non* a definiției:

„Pentru a defini un obiect, trebuie mai întîi să gîndim acel obiect (adică, așa cum am explicat, să reunim în spiritul nostru imaginile al căror ansamblu caracterizează obiectul și formează o noțiune)".

Consecința pe care o trage autorul din această concepție este următoarea: „Din punctul de vedere arătat, termenii *definisabil și gîndibil* trebuie să fie considerați ca echivalenți" (*Op. cit.*, p. 942).

Examinînd acum a treia distincție făcută în lumea obiectelor matematice, adică „ceea ce există", Denjoy afirmă că, din punctul său de vedere: 1. ceea ce este gîndibil este definisabil și are o existență reală; 2. există entități matematice care nu sînt nici gîndibile, nici definisabile. Autorul citat se servește de aceste distincțiuni pentru a arăta eroarea fundamentală comisă în construcția paradoxului lui Richard.

Ideile lui Denjoy sînt deosebit de interesante; ele delimitează noțiunile *gîndibil*, *definisabil* și *existent* și stabilesc conexiunile dintre ele și pînă unde sînt valabile aceste conexiuni. Chiar dacă aceste idei ar trebui să fie completate, nu rămîne mai puțin adevărat că orice analiză logică trebuie să plece de la aceste trei idei: gîndire, definiție, existență și că orice sistem logico-formal de matematici, care nu ține cont de faptul că aceste trei noțiuni sînt esențial legate, riscă să trateze despre altceva decît despre matematici.

Vom reține în special, din examenul făcut pînă aici, următorul rezultat: *A defini corect un lucru înseamnă a gîndi acel lucru și prin aceasta a afirma în mod matematic existența lucrului considerat.*

Dacă, de exemplu, vom da definiții în mod incorect, *lucrul astfel definit nu este gîndit*, și chiar dacă am presupune — o dată cu Denjoy — că există obiecte matematice fără a fi definisabile și ca urmare gîndibile, nu este mai puțin corect să conchidem: dacă un lucru este dat exclusiv prin definiția sa, și această definiție este dintre acelea pe care noi le-am clasat în a doua categorie de definiții incorecte, atunci noi nu gîndim nimic prin această definiție și, în plus, nu avem nici un drept de a presupune că lucrul există.

II. DEFINIȚIA „IDEM PER IDEM"

Să notăm cu D, *definiendum*, și cu d, *definiens*, semnul $=_{\mathrm{Df}}$ fiind simbolul definiției. Definiția lui D prin d se va scrie atunci:

$$D =_{\mathrm{Df}} d.$$

Condiția necesară pentru ca această formulă să nu degenereze într-o definiție *idem per idem* este ca D să nu fie identic cu d, adică $D \neq d$. Altfel am avea o identitate:

$$d =_{\mathrm{Df}} d$$

care, *ca identitate, reprezintă o propoziţie adevărată, dar ca definiţie este eronată şi prin ea nu definim nimic.* Mai mult, noi nu gîndim nimic prin această definiţie eronată şi obiectul presupus a fi exprimat prin D şi definit prin $D = {}_{\mathrm{Df}}d$ nu există.

Să presupunem că avem următoarea definiţie: „mulţimea M este mulţimea tuturor mulţimilor care se conţin ca elemente ele însele". Cu alte cuvinte, dacă mulţimea α aparţine mulţimii α, atunci mulţimea α aparţine mulţimei M:

$$\alpha \in M = {}_{\mathrm{Df}}\alpha \in \alpha. \qquad (1)$$

Condiţia unei definiţii care nu este *idem per idem* arată că mulţimea α nu poate fi identică cu mulţimea M, deoarece am avea atunci definiţia:

$$\alpha \in \alpha = {}_{\mathrm{Df}}\alpha \in \alpha$$

sau

$$M \in M = {}_{\mathrm{Df}}M \in M.$$

Deci, o dată cu definiţia (1), afirmăm, în acelaşi timp, condiţia $\alpha \neq M$, pentru ca ea să nu degenereze într-o definiţie eronată *idem per idem*, prin care nu gîndim nimic, şi, deci, nu afirmăm nimic ca existent.

În consecinţă, dacă nu avem o altă definiţie pentru M, alta decît aceea a mulţimii α (pentru că $\alpha \neq M$), atunci M nu este definit prin (1). *Aceasta înseamnă că expresia* $\alpha \in \alpha$ *nu este definisantă,* ceea ce se înţelege de la sine: definiţia unei mulţimi α şi proprietăţile care decurg pentru ea din propria sa definiţie nu pot fi definisante pentru nici o altă mulţime M, ci numai pentru mulţimea α.

Russell a crezut că asemenea expresii, ca $\alpha \in \alpha$ sau $\varphi(\varphi)$ nu pot fi formate, neavînd sens (pentru că ele nu respectă teoria tipurilor). Concluzia noastră arată că asemenea expresii sînt legitime, dar că ele nu sînt definisante. De exemplu, întrebarea dacă mulţimea numerelor prime se conţine sau nu ca element este o problemă legitimă, care are un sens precis şi de asemenea un răspuns precis: nu, ea nu se conţine ca element. Afirmaţia are un sens determinat şi noi gîndim cu adevărat ceva prin această propoziţie. Deci, nu putem interzice formarea unor expresii de forma $\alpha \in \alpha$ sau $\varphi(\varphi)$ (în comprehensiune), sau cu negaţie, $\sim \alpha \in \alpha$, $\sim \varphi(\varphi)$.

Rezultă din cele discutate că regula definiţiei *non idem per idem* nu mai permite definiţia „mulţimii tuturor mulţimiloı". Să presupunem că am definit noţiunea m de mulţime, sau că noi o considerăm ca o noţiune primitivă. Sfera noţiunii m este mulţimea tuturor mulţimilor, şi nu există altă mulţime în afară de sfera noţiunii m. A încerca să definim mulţimea M a tuturor mulţimilor prin mulţimea determinată prin noţiunea m înseamnă a defini M *idem per idem*, adică a nu defini în realitate nimic, a nu gîndi nimic şi a nu pune nimic ca existent prin M.

III. DEFINIŢIA CONTRADICTORIE

Să considerăm un exemplu de definiţie contradictorie. Să presupunem, ca mai sus, că avem o definiţie a unei mulţimi N: „mulţimea N este mulţimea tuturor mulţimilor α care nu se conţin ca element". Simbolic putem scrie această definiţie astfel:

$$\alpha \in N = {}_{\mathrm{Df}} \sim \alpha \in \alpha.$$

Condiția definiției, anume de a nu fi o contradicție, împiedică ca mulțimea α să fie vreodată egală cu N, deci $\alpha \neq N$. În consecință, dacă noi nu avem pentru N o altă definiție decît aceea a mulțimii α (sau a mulțimilor α), N nu este definit. Deci și aici expresia $\sim \alpha \in \alpha$ nu este definisantă, dar ea este legitimă, pentru că putem totdeauna spune, de exemplu, că mulțimea numerelor prime nu se conține ea însăși ca element, ceea ce înseamnă că nu este ea însăși un număr prim. Această expresie nu este însă definisantă, deoarece, dacă nu respectăm condiția definiției $\alpha \neq N$, cădem în contradicție:

$$\alpha \in N =_{\text{Df}} \sim \alpha \in \alpha \text{ sau } N \in N =_{\text{Df}} \sim N \in N.$$

În consecință „mulțimea N a tuturor mulțimilor care nu se conțin ca elemente“ nu este definită, întrucît expresia $\sim \alpha \in \alpha$ nu este definisantă; N nu este definită, nu este gîndită și nu reprezintă nimic existent.

Să luăm acum un exemplu în comprehensiune. Să considerăm, de pildă, paradoxul lui Russell, construit cu *impredicabil.* Orice predicat își convine sieși ca predicat sau nu, *tertium non datur.* Dacă nu-și convine ca predicat, vom spune că este *impredicabil (Imp).* Deci vom avea definiția: Dacă un predicat φ nu are proprietatea φ, atunci el va avea proprietatea *Imp.* Simbolic:

$$Imp(\varphi) =_{\text{Df}} \sim \varphi(\varphi). \qquad (2)$$

Conform condiției definiției, (2) nu trebuie să includă cazul în care simbolul *Imp* ar putea fi substituit simbolului φ, fiindcă atunci am avea contradicția:

$$Imp(Imp) =_{\text{Df}} \sim Imp(Imp).$$

Deci definiția predicatelor φ și proprietățile lor, care decurg din propriile lor definiții, nu pot să definească un alt predicat *Imp,* ci numai predicatele φ.

Expresia $\sim \varphi(\varphi)$ poate fi formată, ea are un sens bine determinat, dar ea nu este un termen definisant și ca urmare predicatul *Imp* (impredicabil) nu este definit printr-o asemenea definiție, nu este gîndit și nu este pus nici ca existent.

Observație. Amintim tentativa lui H. Behmann, de a rezolva paradoxele logico-matematice făcînd apel la regula pascaliană: în orice definiție trebuie să poți substitui *definiens* lui *definiendum.* Dar iată ce se întîmplă: pentru *Imp* nu avem simbol, sau expresie simbolică care să poată să-i fie substituită pentru a reveni la simboluri fără *Imp.* De unde regula lui Behmann, pentru a împiedica paradoxele: „Expresiile care conțin semne abreviative sînt permise numai în cazul în care substituirea acestor semne prin semnificația lor simbolică este în întregime efectuabilă“ (H. Behmann: *Zu den Widersprüchen der Logik und Mengenlehre, Jahreszeit. der deutsch. Math. Ver.,* 1931). Cu alte cuvinte, Behmann constată că nu există expresie definisantă pentru *Imp,* dar în loc să tragă concluzia că *Imp* nu este definit, el dă o regulă prohibitivă și convențională prin care dorește să evite apariția contradicțiilor. Este interesant de subliniat cu această ocazie dezvoltarea pe care a luat-o ideea lui Behmann în sistemul lui Bocivar (D. A. Bocivar: *Asupra unui calcul trivalent și aplicațiile lui în analiza paradoxelor calculului funcțional extins clasic,* în *Matematiceskii sbornik,* nr. 4, 1939). Bocivar a dat o demonstrație condiției formulate de Behmann (care este condiția pascaliană a definiției).

Logicianul rus a construit un sistem formal fără teoria tipurilor, care poate să înlocuiască sistemul lui Russell. Nețiînd însă seama de teoria tipurilor, antinomiile apar imediat. Autorul arată că apariția antinomiilor se datorează admiterii tacite sau explicite a unui postulat formal, care infirmă tocmai exigența lui Behmann. Dacă renunțăm la acest postulat, sistemul lui Bocivar nu mai este contradictoriu.

IV. DEFINIȚIA CIRCULARĂ A NUMĂRULUI

Vom vorbi acum despre definiția numerelor cardinale în teoria mulțimilor. Ni se spune în această teorie (a se vedea, spre exemplu, A. Fraenkel, *Abstract Set Theory*, p. 59, Amsterdam, 1961): „Numărul cardinal al unei mulțimi *S* este mulțimea tuturor mulțimilor echivalente cu *S*".

Autorul tratatului citat își dă seama de evanescența unei asemenea propoziții, deoarece el scrie în continuare: „Această definiție pare într-un fel paradoxală. Totuși, asemenea definiții sînt astăzi lucruri comune în matematici." Dar faptul că o eroare este comisă în mod frecvent și în diverse variante nu constituie pentru nimeni o obligație de a o accepta. Cu atît mai mult cu cît o propoziție circulară nu enunță nimic, este vidă de orice conținut și, după cum am arătat, dacă dedesubt se ascunde o propoziție identică (propoziție adevărată), ea nu vehiculează nici o cunoștință. Dacă definiția numărului 2 se reduce la identitatea adevărată $2 = 2$, cum am văzut, trebuie să recunoaștem că ea nu ne spune nimic despre numărul 2, și că toate acestea nu servesc la nimic altceva decît să ne ascundă ignoranța. Ea nu introduce nimic fals, dar nici nu introduce nimic adevărat.

Bizareria acestei definiții n-a scăpat nimănui și Russell, de la început, a recunoscut-o, declarînd totuși că el o preferă entității metafizice 2 (*Introduction to Mathematical Philosophy*, trad. fr., p. 31, Paris, 1928). El exprimă acest cerc vicios prin „definiția" (*op. cit.*, p. 32): „*Un număr este ceea ce reprezintă numărul unei clase (mulțimi)*". Russell recunoaște că „o asemenea definiție are, după cum sînt folosite cuvintele, aparența unui cerc vicios", dar în realitate el nu crede că este așa și explică acest tur de *passe-passe* astfel: „Am definit numărul unei clase date fără a utiliza noțiunea generală de număr; în consecință putem să definim numărul *în general* în funcție de *numărul unei clase date* fără a comite o eroare de logică". Pentru a explica vidul acestei definiții, el scrie: „Definițiile de acest fel sînt, de altfel, foarte frecvente. Clasa taților, de exemplu, ar trebui să fie definită definind mai întîi ce înseamnă a fi tatăl cuiva; atunci, clasa taților va cuprinde pe toți cei care sînt tații cuiva." Am citat acest exemplu pentru a sublinia că ne-am obișnuit în așa măsură cu acest fel de a pune problemele încît nu mai reușim să ne descurcăm în probleme elementare. Din punct de vedere logic, „clasa tuturor taților" este sfera predicatului „tată"; dar Russell dorește să definească o nouă clasă, a tuturor taților, prin predicatul „tată", care deja a definit (prin sfera sa) clasa tuturor taților! Explicația dată de Russell că "definițiile de acest fel sînt de altfel foarte frecvente", explicație din nefericire adoptată de către mulți matematicieni (am văzut că Fraenkel și-a însușit-o și el), nu are valoare logică.

Vom arăta în mod direct lipsa de conţinut a acestei definiţii a numărului. Să scriem în acest scop definiţia simbolică a numărului cardinal. În *Principia Mathematica*, *Nc* este numărul cardinal al clasei (mulţimii), adică, în termeni logistici, $Nc'\alpha$ este clasa tuturor claselor echivalente cu α. Să notăm relaţia de echivalenţă (de similitudine) cu *Sm*, şi $\overrightarrow{Sm'\alpha}$ va însemna în acest caz clasa tuturor claselor care au relaţia de similitudine:

$$Nc'\alpha =_{\mathrm{Df}} \overrightarrow{Sm'\alpha}$$

„numărul cardinal al clasei α este clasa tuturor claselor care au relaţia de similitudine cu α".

Dar chiar Russell afirmă: „Oricare ar fi numărul termenilor pe care-i posedă o mulţime, mulţimile care îi sînt asemănătoare vor avea acelaşi număr de termeni ca ea" (*Op. cit.*, p. 31). Cu alte cuvinte construim imaginea abstractă (numărul) a unei clase α şi apoi repetăm clasa α şi spunem că α are relaţia de similitudine cu ea. *Dar definiţia unei clase şi proprietăţile care decurg pentru ea şi numai pentru ea, din propria sa definiţie, nu pot fi definisante pentru nici o altă clasă decît* α, *deoarece numai în acest fel putem distinge clasele (mulţimile) între ele.* Definiţia

$$Nc'\alpha =_{\mathrm{Df}} \overrightarrow{Sm'\alpha}$$

este deci într-adevăr o definiţie *idem per idem*, prin care nu gîndim nimic, nu definim nimic şi nu punem nimic ca existent, cu toate că propoziţia inclusă în această definiţie, rezumată astfel de Russell: „Un număr este ceea ce reprezintă numărul unei clase" este o propoziţie adevărată. Dar această propoziţie nu spune nimic asupra naturii numărului, nefiind o definiţie, ci o identitate.

V. DEFINIŢII PRIN ACCIDENT

Logicienii matematicieni au evitat să vorbească de esenţă şi de accident, de teamă ca aceste noţiuni să nu implice teoria metafizică aristotelică. Dar putem vorbi de esenţă şi de accident din punctul de vedere pur logic, fără a apela la concepţii filosofice. Să luăm un tratat de logică clasică, spre exemplu tratatul lui Alexander Bain: *Logique déductive et inductive* (2 vol., trad. franc., G. Compayré, Paris, 1894). Iată ce spune autorul despre accident: „Accidentul sau concomitentul, ca predicat, exprimă ceva ce nu aparţine esenţei sau conotaţiei subiectului şi ceea ce nici nu se poate deduce din ideea subiectului. *Aurul este cel mai preţios dintre metale*; *Aurul este folosit ca monedă*, iată propoziţii al căror predicat poate fi considerat ca un accident sau ca un concomitent." (*Op. cit.*, I, 2, 17.) Propoziţiile de acest gen nu pot fi considerate ca definiţii ale aurului. Dar să-l urmărim mai departe pe Bain: „Cu predicate de felul acesta se formează mai ales propoziţia reală, în opoziţie cu propoziţia verbală, esenţială, identică (propoziţia analitică a lui Kant). Vom avea atunci propoziţia sintetică a lui Kant, propoziţie în care predicatul este un adaos pozitiv la subiect, nefiind în nici un fel, nici direct, nici indirect, cuprins în subiect. Afirmaţiile care se referă la concomitenţă sînt extrem de numeroase în practica de zi cu zi. Întîlnim adeseori în jurul nostru lucruri care se însoţesc, cu toate că ele nu se implică cu nimic unul pe altul. Toate afirmaţiile relative

la corpuri şi care se referă la situaţia lor locală, la poziţiile lor, la întrebuinţarea lor, sînt afirmaţii de concomitenţă; nu putem să întrebuinţăm aceste predicate în definiţia sau în esenţa corpurilor."

Logica clasică a făcut o distincţie, rămasă tradiţională, între accidente *separabile* şi accidente *inseparabile*. Exemplul acestei distincţii este dat de propoziţiile „Virgiliu a locuit la Roma" (accident separabil) şi „Virgiliu s-a născut la Mantova" (accident inseparabil). Se vede că dacă spunem că „Virgiliu este cel mai mare poet latin" nu rezultă că el a locuit la Roma, nici că s-a născut la Mantova, deoarece accidentul nu poate fi dedus analitic din definiţia unui lucru, nefiind o notă a acestei definiţii. Aşadar, el nu poate fi un caracter definisant.

Să trecem la examinarea noţiunii de clasă sau de mulţime, care constituie elementul fundamental al matematicilor moderne.

Cantor a definit, cum se ştie, noţiunea de mulţime astfel: „O mulţime *(Menge)* este o reuniune într-o unitate a unor obiecte bine determinate *şi* distincte ale intuiţiei noastre sau ale gîndirii noastre, care sînt numite elementele mulţimii". Dar cum cu această concepţie a noţiunii de mulţime s-a dat peste contradicţii, matematicienii au considerat că este mai convenabil să se ia noţiunea de mulţime nu ca o noţiune definită, ci ca un element primitiv al intuiţiei noastre. Iată ce scrie Fraenkel în tratatul citat mai înainte: „Timp de mai multe decade tentativa de *a ameliora* definiţia lui Cantor a rămas complet fără rezultat şi a trebuit *să renunţăm la definiţia conceptului general de mulţime*". Posibilităţile de a remedia situaţia sînt, tot după Fraenkel, în principal, în număr de trei:

1. Să concepem şi să definim conceptul de *mulţime* într-un sens foarte îngust, dar atunci o mare parte a matematicilor clasice (analiză, geometrie, teoria mulţimilor) ar deveni lipsită de sens sau inadmisibilă.

2. Să adoptăm o reformă fundamentală a logicii ca bază a matematicilor.

3. Să recurgem la metoda axiomatică.

În tratatul său, autorul citat alege o cale de mijloc între axiomatica formală şi expunerea intuitivă. Aflăm astfel care este noţiunea de mulţime. Autorul pleacă de la relaţia de apartenenţă *(membership)*, care se citeşte „x este un membru al lui y" sau „x aparţine lui y", sau încă, „y conţine pe x (ca membru)". Această relaţie, notată prin semnul „$\in$", este considerată ca o relaţie primitivă şi acceptată de Fraenkel ca o relaţie nedefinită. Ea va fi utilizată atît cît vor permite axiomele pe care le vom alege. Iată acum ce numeşte Fraenkel o mulţime: „Vom considera, în general, un singur fel de obiecte care sînt admisibile ca argumente ale relaţiei de apartenenţă; aceste obiecte vor fi numite *mulţimi*" (*op. cit.*, p. 13). Citind acest pasaj ai impresia că autorului îi este frică de cuvinte.

Pentru a evita pericolul implicat de noţiunea de mulţime, alţi matematicieni au luat această noţiune ca pe o noţiune primitivă, care se înţelege de la sine. De exemplu, W. Sierpinski nu ne mai spune ce este o mulţime, ci ne indică numai modul de formare al ei:

„*Mulţimi*. Cu obiecte date putem forma mulţimi. De exemplu, cu literele *a, b, c*, putem forma mulţimea acestor litere." (W. Sierpinski: *Cardinal and Ordinal Numbers*, Varşovia, 1958). Formăm mulţimi, dar nu spunem ce este o mulţime!

Îndată ce au apărut contradicțiile în teoria mulțimilor, s-a recurs la metoda axiomatică, pentru a supune noțiunea de mulțime unei serii de restricții axiomatice, unor delimitări matematice riguroase, și astfel s-a ajuns că nu se mai știe în cele din urmă dacă ceea ce numim mulțime este totuși o mulțime! Iată ce scrie în acest sens Bourbaki (*Théorie des ensembles*, p. 60, Paris, 1954): „Din punctul de vedere naiv, multe entități matematice pot fi considerate drept colecții sau mulțimi de obiecte. Nu vom căuta să formalizăm această noțiune și, în interpretarea formalistă care urmează, cuvîntul *mulțime* trebuie considerat ca riguros sinonim cu *termen*; în particular, expresii ca *fie x o mulțime* sînt în principiu cu totul superflue, pentru că orice literă este un termen." Ceea ce seamănă cu un mic joc de logică al celor vechi, care considerau paradoxală propoziția: „Să vorbim tăcînd", în cazul nostru: „să folosim în calcule litere presupuse a fi mulțimi, dar să nu vorbim despre mulțimi".

Să vedem însă cum s-a ajuns la această bizară situație.

Să revenim la noțiunea intuitivă de mulțime. Mulțimea este o colecție de obiecte. Toate elementele care au o aceeași proprietate formează o clasă sau o mulțime. Sau, altfel spus, o clasă (mulțime) este formată din toate valorile admisibile pentru argumentul unei funcții propoziționale $f(x)$.

O funcție propozițională $f(x)$ cu un singur argument determină o singură clasă (mulțime) α, care se scrie:

$$\alpha = \hat{x}\,(fx).$$

Toți aceia care nu verifică o funcție propozițională $f(x)$ formează clasa contrară lui α (mulțimea complementară), notată $-\alpha$, și care se scrie:

$$-\alpha = \sim \hat{x}\,(fx).$$

Să examinăm mai de aproape aceste idei. Dacă scriem pe o foaie de hîrtie numărul 1, numărul π și ecuația lui Pell, am format o clasă sau o mulțime din trei membri, care este perfect determinată. Aceste trei elemente au o proprietate comună: ele figurează pe aceeași foaie de hîrtie. La fel putem spune și „mulțimea formată din toate obiectele care se găsesc în camera d-lui Dupin, strada N, nr. n". Fie aceste obiecte: o masă, patru scaune, o călimară, un stilou, 24 foi de hîrtie, 1215 cărți, un covor și însuși d-l Dupin. Mulțimea este perfect determinată, cu toate că aceste elemente heteroclite se află din întîmplare în această cameră. Este clar că, în amîndouă cazurile, elementele nefiind legate între ele printr-o proprietate comună care să facă parte din conotația fiecărui element, rezultă că pentru a determina aceste mulțimi trebuie să indicăm toți membrii. Dar dacă definim clasa mamiferelor, de exemplu, situația se schimbă: fiecare element din colecție este definit prin definiția generală a predicatului mamifer. Dacă spunem „x aparține clasei mamiferelor", atunci vom ști precis că x este un vertebrat, că el are sîngele cald, pielea acoperită cu păr, că femelele nasc pui vii etc. Să considerăm unul din cele două cazuri de care am vorbit anterior. Să notăm clasa obiectelor din camera d-lui Dupin, strada N, nr. n, cu litera D. Dacă spunem „x aparține clasei D", nu vom ști nimic despre x; poate fi chiar d-l Dupin sau unul din scaune etc. Aceasta se întîmplă din cauză că astfel de clase sînt formate prin accident, în timp ce clasa mamiferelor, de exemplu, este formată prin caractere analitice permanente, comune tuturor elementelor sale.

În consecinţă sînt două feluri de mulţimi:

1. Mulţimi (clase) formate prin accident, şi care sînt date numai dacă toate elementele sînt efectiv date.

2. Mulţimi (clase) formate prin definiţii construite în mod regulat, cu elemente esenţiale ale conotaţiei conceptului definit, unde nu este nevoie să se dea fiecare element.

Rezultă din cele spuse două concluzii:

A. Pentru mulţimile formate prin accident, teza intuiţionistă este perfect valabilă. O astfel de mulţime nu este dată decît dacă elementele sale sînt date fiecare în parte. Cum pentru Brouwer şi adepţii săi această teză nu este valabilă decît în domeniul infinitului, şi cum nu putem indica efectiv toţi membrii unei mulţimi infinite, rezultă pentru ei că mulţimea nu există. Dar aceasta nu este adevărat; numai în domeniul colecţiilor construite prin accident este cerută această condiţie. Orice colecţie, finită sau infinită, dacă este formată prin accident, are nevoie de indicaţia fiecărui membru. Cum însă în domeniul infinitului această obligaţie nu este realizabilă, rezultă că mulţimile infinite definite prin accident nu sînt gîndite, nu sînt în mod real definite şi nu există. Am văzut, de altfel, că accidentul apare în propoziţiile sintetice ale lui Kant, propoziţii contingente, în care predicatul nu este conţinut în subiect, avînd o bază de fapt şi nu una logică. Vom enunţa deci teza lui Brouwer astfel: „Toate propoziţiile (adăugăm noi, formate printr-un accident) care au un conţinut, trebuie să indice una sau mai multe stări de lucruri *(Sachverhalte)* bine determinate şi accesibile experienţei noastre".

Colecţiile infinite, definite prin accident, cer această condiţie, nu fiindcă ele sînt infinite, ci pentru că sînt definite prin accident; fiind infinite, această condiţie nu poate fi satisfăcută.

B. În clasele formate prin accident, cuvîntul „toţi" nu are un sens colectiv, ci unul distributiv; elementele unei astfel de clase nu aparţin colecţiei ca formînd, în mod colectiv, sfera aceluiaşi predicat, ci ele sînt elemente cărora li s-a distribuit prin accident o proprietate care nu face parte din conotaţia nici unuia din aceste elemente. Într-adevăr, a spune: „clasa *tuturor* obiectelor din camera de lucru a d-lui Dupin" (clasă formată prin accident) înseamnă a indica pe *fiecare* din membrii săi, deci toţi membrii trebuie daţi în prealabil şi individual. În consecinţă, „clasa *tuturor* obiectelor din camerai de lucru a d-lui Dupin" înseamnă efectiv „clasa obiectelor din camera d-lu Dupin" luate obiect cu obiect, şi aici *toate* are într-adevăr un sens distributiv.

Observaţia că particula „toţi" — *omnes* — are două sensuri, colectiv şi distributiv, a fost făcută de logicienii scolastici, în teoria privind particulele *syncategoremata*. (A se vedea în volum studiul *Problema paradoxelor în Evul Mediu.*)

Să considerăm, de exemplu, *toate* clasele posibile, inclusiv ultima imaginabilă, pe care le vom nota:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \Omega. \tag{1}$$

Nu avem dreptul să presupunem că există o altă clasă în afara *tuturor* claselor (1), altfel nu am fi avut dreptul să spunem că le-am luat pe *toate*.

Să formăm acum o clasă U cu *toate* clasele posibile din (1). Este posibil? Am ajuns la o contradicţie: există încă o clasă U în afara *tuturor* claselor posibile indicate în (1). Dacă ţinem cont de sensul al doilea al *syncategoremei omnes*, propoziţia: „Să considerăm *toate* clasele posibile $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \Omega$"

trebuie să fie înţeleasă în sensul său distributiv: „Să considerăm fiecare clasă ω_1, ω_2, ω_3, ..., Ω". În acest caz sensul colectiv a fost deja utilizat şi epuizat în formarea claselor (1) şi nu mai este nici o contradicţie, pentru că nu mai există o clasă *U*.

VI. PSEUDOCLASA NON-A

În teoria mulţimilor, ca şi în calculul claselor, întîlnim frecvent o clasă oarecare *A* şi clasa contrară non-*A* (complementul lui *A* din teoria mulţimilor).

De asemenea, se consideră în calculul predicatelor un predicat φ; dacă o entitate logică *x* nu are acest predicat φ, atunci i se acordă un alt predicat *P*.

În acest capitol ne vom ocupa de clasele de forma non-*A*, sau — considerînd problema în comprehensiune — să vedem dacă non-atribuirea unui predicat unei entităţi logice *x* exprimă într-adevăr o predicaţie.

Definiţia unei clase este: „Toţi aceia care verifică o funcţie propoziţională (xf)". Sau mai simplu spus: „O clasă (mulţime) este o colecţie de elemente care admit toate acelaşi predicat". Calculul claselor a acceptat încă o clasă în raport cu un predicat dat *f*: funcţia propoziţională $f(x)$ defineşte clasa $\hat{x}\,(fx)$, dar ea defineşte în acelaşi timp şi clasa tuturor elementelor care nu verifică funcţia $f(x)$. O funcţie propoziţională (cu un singur argument) determină astfel două clase, clasa *A* şi clasa non-*A*, non-*A* fiind formată din „toţi aceia care fac falsă funcţia $f(x)$":

$$A = \hat{x}\,(fx)$$
$$\text{non-}A = \hat{x}\,(\sim fx).$$

Russell şi Carnap au spus mai simplu: „O clasă este extensiunea unui predicat", ceea ce face din noţiunea de clasă sau de mulţime noţiunea logică tradiţională de sferă a unui concept *(Umfang)*.

Clasa *A* este extensiunea predicatului *f*; dar atunci clasa non-*A* este extensiunea cărui predicat? Care este predicatul comun tuturor elementelor care nu admit acelaşi predicat *f*? Am ajuns astfel la dilema următoare: Dacă non-*A* este o clasă, atunci definiţia dată: „Toţi cei care verifică $f(x)$" nu este definiţia clasei; dacă păstrăm cu rigurozitate această definiţie, atunci non-*A* nu poate fi o clasă. Această lipsă de precizie în ceea ce priveşte conceptul de clasă, şi în mod special aşa-zisa clasă non-*A*, poate fi regăsită în toate tratatele de logică sau de matematică. Citim, de exemplu, într-un tratat de algebră de o valoare incontestabilă ca acela al lui B. L. Van der Waerden, *Moderne Algebra*: „Gîndim, ca punct de plecare al tuturor consideraţiilor matematice, unele obiecte reprezentabile, ca, de exemplu, semne de numere, litere sau combinaţii ale acestora. O proprietate pe care fiecare din aceste obiecte o are în mod particular, sau nu o are, defineşte o mulţime sau o clasă; elementele mulţimii sînt obiecte cărora această proprietate le convine". Iată deci confuzia despre care am vorbit: o proprietate, pe care fiecare din aceste obiecte nu o are, defineşte o mulţime sau clasă; elementele acestei mulţimi sînt obiectele cărora această proprietate le convine. Care?

Desigur, matematicienii au libertatea să aleagă noţiunea de mulţime sau clasă cum cred; dar ea trebuie aleasă, şi, o dată aleasă, ea nu poate fi altceva decît ceea ce este. Putem chiar spune că $\hat{x}$ (fx) şi $\hat{x}$ $(\sim fx)$ reprezintă fiecare o clasă; dar, în acest caz, clasa $\hat{x}$ (fx) şi clasa $\sim$ $\hat{x}$ (fx) nu mai pot fi definite printr-o definiţie unică „toţi acei care verifică $f(x)$", ci trebuie să introducem încă o definiţie pentru clasa $\hat{x}$ $(\sim fx)$, şi anume „toţi cei care nu verifică funcţia $f(x)$", ceea ce nu este acelaşi lucru. Vedem dar că, în general, dacă luăm în considerare o funcţie cu un singur argument $f(x)$, amîndouă clasele, $\hat{x}$ (fx) şi $\hat{x}$ $(\sim fx)$, nu pot fi constituite bazîndu-ne pe o definiţie unică a noţiunii de clasă, şi, ca urmare, colecţiile $\hat{x}$ (fx) şi $\hat{x}$ $(\sim fx)$ nu pot fi caracterizate ambele prin acelaşi concept „clasă", cu acelaşi sens.

Să considerăm o clasă determinată, de exemplu, clasa „om"; un element x aparţine acestei clase dacă putem scrie pentru el:

$$x \in \text{om}.$$

Toţi x-ii care fac adevărată această funcţie propoziţională formează clasa om: $\hat{x}(x \in \text{om})$. Clasa non-om nu exprimă sfera nici unui predicat. Cînd scriem $x \in$ non-om, nu am indicat nici o totalitate de elemente care pot fi reunite împreună ca bazîndu-se pe o proprietate comună. Clasa non-om — şi în general clasa non-A — nu exprimă nimic în plus, decît faptul că există elemente care nu au proprietatea comună elementelor clasei om. *Dar cum să afirmăm că toate aceste elemente au o proprietate comună prin faptul că ele nu au o proprietate comună?* După cum a observat Aristotel, clasa non-A nu este definită. Iată ce citim (*De interpretatione*, 2, 16 a): „Numele este un sunet care are un înţeles prin convenţie . . ." Şi mai departe: „Expresia non-om nu este un nume. Într-adevăr, nu există nici un termen determinat care să o desemneze, căci ea nu este nici vorbire, nici negaţie. Putem spune că este numai un nume nedefinit" (pentru că aparţine la orice, la ceea ce este şi ceea ce nu este).

În consecinţă, luînd ca atare expresia „non-A", ea nu este o clasă, pentru că nu există nici un element comun aparţinînd conotaţiei fiecăruia din elementele acestei colecţii care să autorizeze reuniunea lor într-o clasă. Să luăm diferite obiecte care nu sînt „om": peştele nu este om, numărul π nu este om, Luna nu este om, ecuaţia lui Pell nu este om etc.; pentru toate aceste elemente care nu au predicatul om, acesta, neavînd nici un raport cu conotaţia lor, este un accident iar noi constatăm numai că ele nu au acest accident. Deci clasa non-A este definită prin accident, şi anume tocmai prin faptul că aceste elemente nu au un anumit accident. Din punct de vedere logic, ea nu este definită, deoarece o definiţie nu poate fi construită prin accident şi cu atît mai mult prin lipsa unui accident. Este adevărat că în unele cazuri particulare şi bine determinate, dacă în interiorul unei clase date A există numai două clase, a şi b, în mod expres definite fiecare, putem construi clasele a şi non-a, care sînt de data aceasta precis definite. A spune în acest caz că „x aparţine clasei non-a" înseamnă că „x aparţine clasei b". Deci, numai în cazul unor determinări precise o clasă non-a, în interiorul unei alte clase A, poate avea o semnificaţie definită iar elementele sale sînt reunite într-o colecţie pentru că au o proprietate comună. În cazul general clasa non-A nu are nici o semnificaţie, nefiind decît un „nume nedefinit", după cum a afirmat Aristotel.

Aceeaşi observaţie poate fi făcută şi în problema predicatelor negative. Aristotel s-a ocupat pe larg de această problemă (*Analytica priora*, I, 46). El scrie examinînd termenii definiţi şi termenii nedefiniţi: „În stabilirea sau respingerea unei concluzii, există o diferenţă după cum considerăm ca identică sau ca diferită semnificaţia expresiilor *a nu fi acesta* şi *a fi non-acesta*; de exemplu, *a nu fi alb* şi *a fi non-alb*. Într-adevăr, sensul nu este acelaşi iar, pe de altă parte, negaţia lui *a fi alb* nu este *non-alb*, ci *a nu fi alb*". Simpla afirmaţie „x nu are predicatul P" nu-i atribuie lui x un predicat, deoarece, din faptul că x nu verifică funcţia propoziţională $P(x)$, nu rezultă pentru x o proprietate. Avem exact problema precedentă văzută în comprehensiune.

Vedem acum clar care este eroarea în aceste probleme: a fost introdusă o proprietate P, pe care o entitate logică x ar avea-o ca urmare a faptului că x nu are o altă proprietate. Dar a avea pur şi simplu o proprietate nu înseamnă a avea o altă proprietate şi nici a nu avea pur şi simplu o proprietate nu înseamnă a avea o altă proprietate. Acelaşi lucru se poate spune şi pentru clase: simplul fapt de a aparţine unei clase nu constituie prin el însuşi o altă proprietate, de a aparţine unei alte clase, şi nici simplul fapt de a nu aparţine unei clase nu constituie prin el însuşi o altă proprietate, de a aparţine unei alte clase.

Dacă din simplul fapt că un lucru oarecare x nu admite un predicat P ar rezulta că x ar admite un predicat Q, atunci, deoarece x nu admite un număr imens de predicate, ar rezulta că x, oricare ar fi el, admite un număr imens de predicate, ceea ce este absurd.

VII. SUBMULŢIMILE UNEI MULŢIMI ŞI TEOREMA LUI CANTOR

Să considerăm acum noţiunea de submulţime (sau subclasă). Să luăm definiţia de submulţime din cartea lui Fraenkel, *Abstract Set Theory* (p. 13): „*Submulţimi. Definiţie.* Dacă fiecare membru al unei mulţimi S este de asemenea membrul unei alte mulţimi E (adică, de exemplu, dacă $x \in S$ implică $x \in E$), atunci S este numit o submulţime a lui E."

Vom observa mai întîi că oricare submulţime nu este constituită ca mulţime decît în funcţie de o mulţime deja dată; submulţimea S a mulţimii E nu are o definiţie independentă de mulţimea E, a cărei definiţie se presupune că a fost dată anterior. Nu există submulţimi în sine, nu există decît mulţimi. Submulţimile sînt create numai în interiorul unei mulţimi date. Submulţimile nu sînt definite prin însăşi definiţia unei mulţimi E; ele nu derivă direct şi analitic din noţiunea de mulţime. Din faptul că s-a dat definiţia sau chiar ideea de mulţime nu rezultă că există submulţimi. În consecinţă, submulţimile unei mulţimi, considerate ca noi mulţimi, sînt construite convenţional, iar din punct de vedere logic ele sînt definite prin accident.

Din definiţia dată mai înainte rezultă că fiecare mulţime este de asemenea propria sa submulţime.

Fie mulţimea $E = \{a, b, c\}$; putem alege toate elementele lui E şi să formăm submulţimea E a lui E; putem să alegem aceste elemente două cîte două şi vom obţine o nouă submulţime a lui E:

$$S_1 = \{a, b\},\ S_2 = \{a, c\},\ S_3 = \{b, c\} \text{ etc.}$$

Dar aceste submulţimi sînt definite prin convenţie, şi ele nu există decît în interiorul mulţimii date. A le scoate din universul lor particular, unde convenţia noastră le-a creat, înseamnă a le anihila, pentru că nici o convenţie nu există în sine. Dar tocmai aceasta este tentativa pe care o facem cînd credem că gîndim numărul de submulţimi ale unei mulţimi date ca existînd în afara mulţimii însăşi care le serveşte de bază. O mulţime poate să aibă o definiţie propriu-zisă ca mulţime, dar ca submulţime nu este definită decît prin accident. Este adevărat că este legitim să formăm prin accident submulţimile unei mulţimi date E; eroarea constă în faptul că vroim să considerăm submulţimile lui E, definite şi existînd numai în funcţie de E, ca definite şi existînd independent de E, şi în acest caz nu mai definim nimic şi nu afirmăm nimic ca existent.

În rezumat, dacă se dă o mulţime α, putem forma cu elementele lui α submulţimi, dar aceste submulţimi nu pot fi date decît în interiorul lui α; a presupune că ele există fără α, cu ajutorul căruia ele sînt definite prin accident, înseamnă să suprimăm singurul lor element care le defineşte, adică accidentul, şi atunci submulţimile nu sînt deloc definite. Cu alte cuvinte, submulţimile trebuie să rămînă submulţimi şi nu să devină mulţimi.

Această concluzie apare şi mai evidentă dacă utilizăm notaţiile simbolice. Se notează clasa subclaselor unei clase α prin $Cl'\alpha$ (mulţimea puterilor din teoria mulţimilor); printre subclasele lui α se găsesc chiar clasa α şi clasa vidă. Avem în *Principia Mathematica* definiţia:

$$Cl'\alpha =_{Df} \hat{\beta}(\beta \subset \alpha).$$

„Clasa tuturor subclaselor lui α" este definită ca fiind „toate clasele care verifică funcţia propoziţională $\beta \subset \alpha$" (care sînt incluse în α). Dar clasa β nu este definită ca subclasa lui α decît prin definiţia lui α; deci β presupune clasa α şi funcţia propoziţională $\beta \subset \alpha$ nu este definisantă. Avem aici un exemplu de definiţie *idem per idem* din categoria a doua, numită diallela: clasa $Cl'\alpha$ a tuturor subclaselor lui α este definită cu ajutorul clasei α şi al claselor β, definite ca subclasele lui α prin clasa α.

Să presupunem, în general, că formăm o clasă G luînd toate clasele β care au o relaţie R cu o clasă dată α. Vom avea prin definiţie:

$$G =_{Df} \hat{\beta}(\beta R \alpha).$$

Dar condiţia pentru o definiţie de a nu degenera într-o definiţie nulă *idem per idem* este, cum am arătat deja, $\beta \neq \alpha$. Deci β nu poate fi o clasă egală cu α, şi nu poate fi nici definită cu ajutorul lui α. Dar tocmai această condiţie nu este îndeplinită şi pentru aceasta clasa subclaselor nu este definită.

Să observăm încă o dată: subclasele unei clase pot fi formate, şi ele sînt formate prin accident (şi aceasta este posibil numai dacă toate elementele sînt date), dar clasa tuturor subclaselor nu este definită decît prin accident şi pentru aceasta ea nu este corect definită; noi nu gîndim nimic prin această definiţie şi nu punem nimic ca existent prin ea. Formarea subclaselor unei clase are un caracter empiric, de fapt; colecţia acestor subclase poate fi realizată numai în cazuri practic date, dar ea nu este realizabilă prin definiţie. Rezultă că în domeniul claselor infinite chestiunea nu este realizabilă şi exigenţa lui Brouwer găseşte prin aceasta o explicaţie pur logică.

Fiind dată o mulţime M, submulţimile lui M pot fi formate numai dacă toate elementele lui M sînt date. În domeniul numerelor este suficient să dăm

efectiv numărul elementelor unei mulțimi M pentru a calcula numărul de submulțimi, și în consecință să formăm mulțimea submulțimilor sale. Dar, dacă mulțimea este infinită, numărul elementelor sale nu este dat și, în consecință, nu putem determina efectiv toate submulțimile, numărul lor sau mulțimea lor.

Matematicienii au simțit, de la primele cercetări axiomatice asupra teoriei mulțimilor, că este ceva în neregulă în problema submulțimilor unei mulțimi, pentru că chiar Zermelo s-a văzut obligat să introducă mulțimea submulțimilor unei mulțimi printr-o axiomă de existență: *Fiind dată o mulțime oarecare, mulțimea submulțimilor ei există.* Pentru a-i da singurul sens pe care-l poate avea, această axiomă trebuie să fie enunțată după cum urmează: *Fiind dată o mulțime finită, indicînd efectiv toate elementele sale, putem forma mulțimea tuturor submulțimilor sale.* Am spus că „putem forma" și nu ca în axioma lui Zermelo „există", deoarece submulțimile, ca și mulțimile lor, nu există prin definiție, adică înaintea formării lor, ci numai după construirea lor efectivă, fiind formate prin accident și nu definite prin accident (ceea ce nu are sens). Numai după construirea prin accident a mulțimii tuturor submulțimilor unei mulțimi date poate aceasta să fie efectiv gîndită, și nu înainte.

Acum, dacă luăm în considerare paradoxul lui Cantor, privind numărul cardinal cel mai mare, putem ușor să descoperim eroarea. Fie M mulțimea tuturor mulțimilor și Nc numărul său cardinal: Nc este cel mai mare număr cardinal posibil. Pe de altă parte, Cantor demonstrează că dacă o mulțime are n elemente, numărul submulțimilor sale este 2^n și $2^n > n$. De unde teorema bine cunoscută: numărul cardinal al mulțimii tuturor submulțimilor unei mulțimi M este mai mare decît numărul cardinal al mulțimii M. În consecință, dacă M este mulțimea tuturor mulțimilor, numărul său cardinal Nc este cel mai mare posibil; numărul cardinal al tuturor submulțimilor sale are, însă, un număr cardinal mai mare decît Nc.

Dacă ținem seama de analiza precedentă, vedem că paradoxul lui Cantor nu este posibil pentru două motive: 1. El presupune formarea mulțimii M a tuturor mulțimilor posibile, și am arătat că această mulțime nu este definită și deci nu gîndim nimic prin M și nici nu punem nimic ca existent prin el. 2. Submulțimile unei mulțimi M nu pot fi formate prin definiție (ca rezultat al considerațiilor pe care le-am făcut), ci numai dacă elementele lui M sînt date și indicate efectiv, ceea ce nu este cazul în paradoxul lui Cantor. Aceasta ne conduce însă la o examinare mai de aproape a teoremei lui Cantor amintită: *Puterea (numărul cardinal) mulțimii tuturor submulțimilor unei mulțimi date este superioară puterii (numărului cardinal) acestei mulțimi.* Conform acestei teoreme, nu ar putea exista o ultimă mulțime (clasă), adică o mulțime universală, pentru că mulțimea submulțimilor acestei mulțimi (presupusă universală) ar fi mai extensivă. Această teoremă a permis lui Cantor să definească mulțimile infinite din ce în ce mai extensive, adică din ce în ce mai puternice, care formează seria numerelor transfinite, seria *Alephi*-lor. Dar rezultă din analiza făcută că pentru mulțimile infinite noțiunea de submulțime nu este aplicabilă. Într-adevăr, în domeniul infinitului condiția cerută de mulțimile construite prin accident nu este realizabilă, deoarece nu putem indica toate elementele unei astfel de mulțimi sau numărul lor efectiv. În consecință, *Alephii* lui Cantor sînt definiți prin accident, adică nu sînt definiți, nu sînt gîndiți și nu avem dreptul să-i punem ca existenți.

VIII. LIMITĂRILE INTERNE ALE FORMALISMELOR

În 1931 Kurt Gödel, într-un articol devenit celebru *(Ueber formal unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica" und verwandter Systeme I, Monatshefte für Math. und Physik*, Bd. 37, 1931*)*, arăta, printr-o metodă absolut personală (devenită ulterior metoda aritmetizării sistemelor formale), că putem întotdeauna formula într-un sistem logico-formal o expresie corectă care este „indecidabilă" — *unentscheidbar*.

Ideea că simbolismul logico-matematic își are limitele sale s-a impus chiar lui Russell de la începutul cercetărilor sale. Dar să vedem, în principiu, care este argumentarea lui Gödel și care este valoarea ei reală.

Evoluția sistemelor formale, în ceea ce privește aspectul lor metateoretic, a condus pe Gödel la o metodă nouă de a studia aceste sisteme. Metoda Gödel poartă numele de metoda *aritmetizării*. Ea constă, în principiu, din următorul procedeu: se numerotează elementele unui sistem formal cu numere întregi într-o anume ordine și se identifică semnele prin numerele lor. În loc să vorbim de un anumit semn al unui anumit sistem formal, vom vorbi de numărul cu care am notat semnul respectiv într-o ordine aleasă. Pe scurt, aceasta înseamnă că se traduc elementele unui sistem S în mod aritmetic într-un metasistem. Corespondența fiind biunivocă, această aritmetizare are un dublu sens: putem trece de la sistemul (sau limba) S la sistemul (sau limba) S', dar și invers, putem traduce sistemul S' în S.

După cum am menționat, Gödel a expus pentru prima dată metoda aritmetizării în 1931, dar această metodă fusese deja clar enunțată și utilizată de Leibniz (a se vedea L. Couturat, *La Logique de Leibniz*, Paris, 1901).

Prin metoda sa Gödel își propune să arate că speranța matematicienilor, de a exprima complet știința lor în mod formal, este iluzorie și că există în sistemele logico-formale de tip *Principia Mathematica* probleme relativ simple care nu pot fi rezolvate. Demonstrația lui Gödel privește anumite sisteme formale care satisfac anumite condiții, și anume: sistemul este necontradictoriu și destul de vast (prin axiomele sale) pentru a conține aritmetica. Pentru sistemele incomplete prin chiar definiția lor, adică prin construcția axiomatică parțială a lor, problema pusă de Gödel nu are sens. Să vedem în esență raționamentul (J. Ladrière, *Les Limitations internes des formalismes*, Paris-Louvain, 1957).

Fie un sistem formal de tip *Principia Mathematica*. O dată aritmetizat, orice propoziție din sistem poate fi reprezentată printr-un număr întreg la nivelul metamatematic al acestui sistem. Să construim acum enunțul metateoretic:

„Propoziția cu numărul n nu este derivabilă în sistemul S". Această propoziție P variabilă (căci ea conține variabila n) va avea un număr de ordine bine determinat în sistemul aritmetizat S, fie r. Dacă în propoziția variabilă P, valabilă pentru orice număr natural n, înlocuim variabila n prin numărul determinat r, atunci propoziția P devine: *„Propoziția cu numărul r nu este derivabilă în sistemul S"*. Dar această propoziție aparține sistemului S și afirmă propria sa non-derivabilitate *(Unentscheidbarkeit)* în sistemul S. Acest paradox (înrudirea sa cu paradoxele logico-matematice a fost demonstrată de Ch. Perelman și M. Barzin) este analog, dacă nu identic, cu paradoxul megaric al mincinosului. Într-adevăr, ne spune Hilbert (D. Hil-

bert und P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, Berlin, 1939), dacă cineva declară: „Propoziția pe care o pronunț acum nu poate fi rezultatul unei demonstrații", această propoziție conduce la un paradox ca și propoziția „Eu mint".

Pentru a prezenta teorema lui Gödel într-o manieră mai tehnică și prescurtată, vom utiliza studiul profesorului Jules Vuillemin: *Sur les conditions qui permettent d'utiliser les matrices russelliennes des antinomies (1905) pour exprimer les théorèmes des limitations internes des formalismes* (*Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. VII, number 1, January 1966). Expunerea lui J. Vuillemin subliniază înrudirea demonstrației lui Gödel cu aceea utilizată în teorema lui Cantor și cu numerotația utilizată în antinomia lui Richard.

Fie formalismul L din *Principia Mathematica*, presupus coerent, aritmetizat de Gödel. Dacă q este o propoziție din L, aritmetizarea permite să se exprime sub forma unui enunț din aritmetica recursivă propoziția „q este derivabilă în L". Pe de altă parte, mulțimea propozițiilor din L, conținînd o variabilă liberă individuală susceptibilă să fie înlocuită printr-o cifră, este demonstrabilă; o putem deci ordona printr-o relație R din aritmetica recursivă, reprezentabilă în L prin predicatul R^*. Fiecare propoziție $q(x)$ din L primește astfel un număr. Putem scrie mulțimea acestor propoziții sub forma următoare: $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_n(x) \ldots$

Fiecăreia din aceste propoziții deschise îi corespunde un șir infinit de propoziții închise, obținute prin substituirea unei cifre în locul variabilei:

$$\begin{array}{ll}
q_1(x) & q_1(1),\ q_1(2),\ q_1(3),\ \ldots,\ q_1(n),\ \ldots \\
& \quad\searrow \\
q_2(x) & q_2(1),\ q_2(2),\ q_2(3),\ \ldots,\ q_2(n),\ \ldots \\
& \qquad\qquad\quad\searrow \\
q_3(x) & q_3(1),\ q_3(2),\ q_3(3),\ \ldots,\ q_3(n),\ \ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\vdots & \\
\vdots & \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\searrow \\
q_n(n) & q_n(1),\ q_n(2),\ q_n(3),\ \ldots,\ q_n(n),\ \ldots
\end{array}$$

Să considerăm șirul diagonal:

$$q_1(1),\ q_2(2),\ q_3(3),\ \ldots,\ q_n(n),\ \ldots$$

Toate propozițiile închise, fiind sau derivabile sau nederivabile în L, urmează o bipartiție a mulțimii diagonale. Fie atunci submulțimea șirului constituit de mulțimea propozițiilor nederivabile în L. Să numim u clasa numerelor asociate prin ordinea R^* acestor propoziții nederivabile. Dacă numim numărul goedelian al unei propoziții numărul care îi este asociat prin R, și desemnăm prin $Dem\ q_n(x)$ enunțul metateoretic: „Propoziția cu numărul goedelian n este derivabilă în L", obținem:

$$n \in u \equiv \sim Dem\ q_n(x). \qquad (1)$$

Cu alte cuvinte, numărul n aparține unei clase u dacă și numai dacă propoziția obținută prin înlocuirea variabilei x din $q_n(x)$ prin simbolul care reprezintă numărul n nu este derivabilă în L. Dar proprietatea de a aparține clasei u este reprezentabilă în L printr-o expresie r jucînd rolul de predicat. Expresia $r(x)$ desemnează propoziția deschisă „x aparține clasei u". Această

propoziţie este numerotată prin R^* şi putem scrie, dacă acest număr este s, $r_s(x)$. Putem atunci forma, prin acelaşi procedeu ca înainte, propoziţia $r_s(x)$, care aparţine lui L şi care înseamnă: „Numărul întreg aparţine clasei u", adică, în virtutea lui (1):

„Propoziţia obţinută prin înlocuirea variabilei x din $r_s(x)$ prin simbolul care reprezintă s nu este derivabilă în L", adică:

„Propoziţia $r_s(x)$ nu este derivabilă în L".

Propoziţia $r_s(x)$ afirmă deci propria sa nederivabilitate în L.

Într-adevăr, să presupunem că $r_s(s)$ este derivabilă. Atunci întregul s are proprietatea enunţată de propoziţia $r_s(x)$ şi deci face parte din u. Dar atunci: $\sim$ *Dem* $r_s(s)$. Să presupunem că $r_s(s)$ este nederivabilă. Atunci s nu-i aparţine lui u şi *Dem* $r_s(s)$. Deci dacă $r_s(s)$ este fie derivabilă, fie nederivabilă, L este incoerent. Dar am presupus că L este coerent. Deci $r_s(s)$ este nederivabil.

„Analogia cu demonstraţia utilizată în teorema lui Cantor, scrie Jules Vuillemin, permite să se reconstruiască uşor teorema lui Gödel plecînd de la antinomia de formă generală A" (a cărei matrice generală a fost dată mai înainte în studiul citat).

Am recurs în mod special la studiul logicianului francez, pentru că articolul său arată două lucruri care ne interesează în mod deosebit, şi anume: 1. că structura formală (sau, în terminologia lui J. Vuillemin, „matricea") a teoremei lui Gödel corespunde matricei antinomiei lui Richard; 2. În consecinţă, că afirmaţia unor logicieni că teorema lui Gödel este în realitate un paradox este justificată.

Am prezentat demonstraţia lui Gödel în ceea ce are ea esenţial. Bazîndu-se pe această demonstraţie, el trage concluzia că „în orice clasă de formule necontradictorii există propoziţii indecidabile *(unentscheidbare)*". De unde s-a tras concluzia generală că orice formalism deductiv are frontierele lui şi deductibilitatea are ea însăşi limitele ei.

Rezultatul obţinut de Gödel a fost reluat şi demonstrat într-o altă manieră, pe baza altor ipoteze.

Teorema limitării interne a formalismelor a suferit unele extensiuni, deoarece ea pune în discuţie natura şi valoarea demonstraţiei însăşi. Nu vom intra în detaliile acestei chestiuni (pe care le putem găsi, de exemplu, în cartea lui J. Ladrière, deja citată), deoarece ceea ce ne interesează aici este principiul pe care este bazată toată această argumentare.

Înainte de a face apropierea dintre teorema limitării şi analiza dezvoltată mai sus, vom face o primă remarcă. Ceea ce ar trebui să frapeze, în primul rînd, pe toţi cei care au formulat astfel de propoziţii, este caracterul lor în întregime trivial. Vom spune chiar că matematicile nu au putut fi atacate, în ceea ce priveşte completitudinea sau incompletitudinea lor, decît dinspre partea trivială a acestor ştiinţe. Toate teoriile de incompletitudine, savant construite, nu vor putea masca faptul că fondul lor este propoziţia trivială a lui Gödel: „Propoziţia desemnată prin numărul r nu este derivabilă în sistemul S", propoziţie care are în sistemul S tocmai numărul r. Nici o propoziţie matematică propriu-zisă n-a fost demonstrată pînă în prezent ca indecidabilă. Exemplul dat de obicei, că pentru ecuaţia lui Fermat $x^n + y^n = z^n$ $(n > 2)$ nu s-a putut demonstra că admite soluţii întregi sau nu, este incorect. Într-adevăr, dacă această ecuaţie ar fi indecidabilă, în

principiu, în aritmetică, atunci ea nu ar putea fi demonstrată în nici un caz particular. Dar știm că marea teoremă a lui Fermat a fost demonstrată pentru un număr foarte mare de valori particulare ale lui n: pentru $n = 4$ imposibilitatea sa în numere întregi a fost demonstrată de către chiar Fermat; pentru $n = 3$, de către Euler; pentru $n = 5$ și $n = 14$, de către Lejeune-Dirichlet; pentru $n = 7$, de către Lebesgue; Kummer a demonstrat-o pentru toți exponenții primi impari care nu sînt factori ai numărătorilor primelor $\frac{n-3}{2}$ numere ale lui Bernoulli etc.

În consecință, nu putem da ecuația lui Fermat ca exemplu de propoziție aritmetică indecidabilă. Nu fapte aritmetice reale apar ca indecidabile, ci propoziții construite arbitrar și convențional și exprimate de această manieră arbitrară și convențională prin simboluri numerice. Asupra acestei *convenționalități* a expresiilor zise indecidabile trebuia să se concentreze atenția acelora care au construit aceste paradoxe, deoarece problema care se pune nu este o problemă de logică intrinsecă a teoriilor deductive formalizate, ci o problemă a limitelor convențiilor noastre. *Nici o convenție nu poate fi exprimată printr-o propoziție universală și deci orice construcție formală convențională este circumscrisă și limitată.*

Iată, în rezumat, argumentația noastră:

1. Ordinea $R(p)$ în care Gödel numerotează semnele sistemului S este aleasă în mod arbitrar. Deci orice expresie din S, care este definită numai prin șirul arbitrar al numerelor atribuite simbolurilor din care ea este formată, este definită prin accident. (De exemplu, putem defini mulțimea tuturor expresiilor sistemului S ale cărei serii de numere corespondente conțin grupul 33; dar orice proprietate stabilită pe această particularitate este o proprietate numită „accident" și ea nu este definisantă).

2. Expresiile definite prin accident nu pot fi „decise" teoretic în sistemul S, în care ele sînt construite, pentru că nici o expresie definită prin accident nu poate fi „decisă" teoretic, ci numai printr-o constatare de fapt (acestea sînt propozițiile sintetice ale lui Kant, cum am văzut).

3. Expresia construită de Gödel, formulată mai simplu („Propoziția avînd numărul r nu este decidabilă în sistemul S_r") a ieșit din cadrul relativ unde ea a fost formulată și numerotată și este considerată în afara accidentului care a creat-o; iată de ce nu este definită.

Am ajuns la acest rezultat, găsit mai sus în alte exemple. Propoziția numerotată cu numărul r, pe care ea îl poartă prin accident, este definită numai prin acest accident r și nimic mai mult, nu apare în ea nici un alt număr care ar determina raportul relativ și convențional cu celelalte propoziții din sistemul S; deci propoziția notată prin numărul r, fiind definită prin accident, nu este deloc definită și nu punem nimic ca existent.

Pentru a ajunge la această concluzie, credem că nu era nevoie de demonstrația utilizată în teoremele de limitare. Credem că era suficient să ținem cont de condițiile definiției și să considerăm că prin accident nu se poate defini nimic.

IX. CONCLUZII

Credem că am arătat, prin analiza precedentă, că trebuie neapărat să respectăm condiţiile definiţiei pentru a defini cu adevărat ceva, în consecinţă pentru a gîndi ceva şi, în fine, pentru a pune ceva ca existent.

Toate definiţiile care introduc simple cuvinte, definiţiile prin abreviere, definiţiile convenţionale, definiţiile semnelor sau ale simbolurilor sînt definiţii construite prin accident şi trebuie să fie utilizate cu prudenţă.

În sistemele logico-formale, ca şi în matematici, sînt utilizate continuu astfel de definiţii. Logica simbolică, manipulînd simboluri vide de orice conţinut, este, în general, obligată să privească relaţia dintre *definiens* şi *definiendum* ca o relaţie arbitrară. Sînt introduse astfel definiţiile prin accident, care, dacă permit abreviaţii utile, nu exprimă în schimb nici un concept nou; nu gîndim nici o idee şi nu punem nimic ca existent logic. Pentru a evita unele consecinţe ale acestor definiţii nule, trebuie să ţinem seama de condiţiile definiţiei, după cum am văzut.

Dacă *definiendum* are forma $x\,R\,F$ şi *definiens* este $x\,R\,y$, atunci $y \neq F$. Cu alte cuvinte, în definiţia

$$x\,R\,F =_{\mathrm{Df}} x\,R\,y$$

$y \neq F$, altfel, dacă facem pe $y = F$, definiţia este *idem per idem*:

$$x\,R\,F =_{\mathrm{Df}} x\,R\,F.$$

Dacă luăm forma particulară a acestei definiţii, unde $y = x$:

$$x\,R\,F =_{\mathrm{Df}} x\,R\,x,$$

vedem că această condiţie rămîne valabilă şi $x \neq F$, altfel F este definit *idem per idem*.

Dacă *definiendum* are forma $x\,R\,F$ şi *definiens* este $\sim x\,R\,y$, atunci $y \neq F$. Cu alte cuvinte, în definiţia

$$x\,R\,F =_{\mathrm{Df}} \sim x\,R\,y$$

$y \neq F$, altfel, dacă facem $y = F$, definiţia este contradictorie:

$$x\,R\,F =_{\mathrm{Df}} \sim x\,R\,F.$$

Dacă luăm forma particulară a acestei definiţii, în care $y = x$:

$$x\,R\,F =_{\mathrm{Df}} \sim x\,R\,x$$

vedem că această condiţie rămîne valabilă şi $x \neq F$, altfel F este definit prin contradicţie. În consecinţă, dacă adăugăm aceste două formule sistemelor formale,

$$\text{D1}\quad x\,R\,F =_{\mathrm{Df}} x\,R\,y. \supset . y \neq F$$

$$\text{D2}\quad x\,R\,F =_{\mathrm{Df}} \sim x\,R\,y. \supset . y \neq F,$$

definiţiile *idem per idem* şi definiţiile contradictorii nu mai pot apărea.

Observaţia I. Formulele D1 şi D2 nu exprimă nimic asupra naturii definiţiei. Dacă negăm posibilitatea pentru definiţie de a fi adevărată sau

falsă, atunci putem privi D1 și D2 numai ca o scriere compactă pentru a exprima condițiile definiției. Cu alte cuvinte, dacă dăm definițiile

$$x\,R\,F =_{\text{Df}} x\,R\,y$$
$$x\,R\,F =_{\text{Df}} \sim x\,R\,y$$

ele trebuie să fie însoțite de $y \neq F$.

Observația II. Paradoxele logico-matematice, atît logice cît și semantice, sînt construite cu ajutorul definițiilor care se transformă în definiții *idem per idem* sau definiții contradictorii. De exemplu, paradoxul lui Russell al clasei tuturor claselor care nu se conțin ca elemente pleacă de la definiția:

$$\alpha \in M =_{\text{Df}} \sim \alpha \in \alpha.$$

Această definiție dă loc la echivalența generală (pentru orice α):

$$\alpha \in M \equiv \sim \alpha \in \alpha.$$

Pentru $\alpha = M$, avem contradicția:

$$M \in M \equiv \sim M \in M.$$

Propoziția „clasa tuturor claselor care nu se conțin ca element este propriul său element" este echivalentă cu negația sa, ceea ce este absurd. Dar dacă se ține seama de D2, atunci, punînd definiția

$$\alpha \in M =_{\text{Df}} \sim \alpha \in \alpha,$$

avem $\alpha \neq M$ și paradoxul nu este posibil.

Dar nici clasa N a tuturor claselor care se conțin ca elemente nu poate fi formată. Într-adevăr, punînd definiția $\alpha \in N =_{\text{Df}} \alpha \in \alpha$, trebuie să avem, conform lui D1, $\alpha \neq N$ și N nu este definit prin expresia $\alpha \in \alpha$.

În același fel se rezolvă celelalte paradoxe cu ajutorul condițiilor definiției. (Am tratat complet problema paradoxelor, din acest punct de vedere, în cartea noastră *Soluția paradoxelor logico-matematice*, București, 1966).

De exemplu, paradoxul lui Russell construit cu predicatele *predicabil-impredicabil* (pe care l-am menționat deja) pleacă de la definiția: „Dacă un predicat φ nu are proprietatea indicată de el însuși, atunci se spune că predicatul are proprietatea *impredicabil*" (pe care o notăm Imp). Definiția este deci:

$$Imp(\varphi) =_{\text{Df}} \sim \varphi(\varphi) \tag{1}$$

Această definiție dă loc la echivalența generală (pentru orice φ):

$$Imp(\varphi) \equiv \sim \varphi(\varphi) \tag{2}$$

Dar, pentru $\varphi = Imp$, obținem echivalența absurdă a unei propoziții cu negația sa:

$$Imp\,(Imp) \equiv \sim Imp\,(Imp). \tag{3}$$

Dar dacă ținem seama de D2,

$$\text{D2} \quad x\,R\,F =_{\text{Df}} \sim x\,R\,y \cdot \supset \cdot\, y \neq F,$$

unde facem $x = \varphi$, $y = \varphi$, $F = Imp$, iar relaţia R devine relaţia de predicaţie, avem

$$D2 \quad Imp(\varphi) =_{Df} \sim \varphi(\varphi) \cdot \supset \cdot \varphi \neq Imp.$$

Deci, in definiţia (1) $\varphi \neq Imp$ şi substituţia $\varphi = Imp$ in echivalenţa (2) nu este posibilă; în consecinţă, echivalenţa contradictorie (3) nu mai poate fi construită.

Ceea ce este interesant de subliniat cu această ocazie este faptul că înseşi paradoxele semantice işi găsesc soluţia prin aceleaşi condiţii ale definiţiei D1 şi D2. Să considerăm, de exemplu, paradoxul lui Grelling-Nelson. Fiecare cuvînt are proprietatea pe care o exprimă sau nu are această proprietate. De exemplu, cuvîntul „românesc" este românesc; cuvîntul „lung" nu este lung; cuvîntul „scurt" este scurt etc. Dacă un cuvînt are proprietatea pe care o denotă, vom spune că are predicatul *autologic*; în caz contrar, el este *heterologic*. Dar orice cuvînt are proprietatea pe care o denotă sau nu o are, orice cuvînt este *autologic* sau *heterologic*, *tertium non datur*. Să notăm prin „C" cuvîntul, şi prin C proprietatea denotată de el. Să scriem *autologic* $= Aut$ şi *heterologic* $= Het$.

Avem definiţia:

$$Het(„C") =_{Df} \sim C(„C"). \qquad (1)$$

Această definiţie dă loc la echivalenţa generală (pentru orice „C"):

$$Het(„C") \equiv \sim C(„C"). \qquad (2)$$

Pentru „C" = „Het" obţinem contradicţia:

$$Het(„Het") \equiv \sim Het(„Het"). \qquad (3)$$

Dar dacă ţinem seama de condiţia D2, unde facem $x = y =$ „C", $F = Het$ şi relaţia R devine paranteza ( ), avem:

$$D2 \quad Het(„C") =_{Df} \sim C(„C") \cdot \supset \cdot „C" \neq „Het".$$

Prin urmare, definiţia (1) impune condiţia „C" $\neq$ „Het" şi deci această condiţie este valabilă şi pentru echivalenţa (2); urmează de aici că echivalenţa contradictorie (3) nu mai poate fi construită.

Acest exemplu arată încă un lucru: dacă ţinem cont de D1 şi D2, antinomiile logice şi cele semantice au o singură şi aceeaşi soluţie şi nu mai putem face o distincţie logică între ele considerînd clasificarea sofismelor în două categorii: 1. sofisme de limbaj, numite *in dictione*; 2. sofisme de gîndire sau logice, numite *extra dictionem*. Această clasificare, menţionată în aproape toate tratatele de logică şi propusă în logica matematică de către Ramsey, fusese contestată de Aristotel, deoarece el scria textual: „Diferenţa pe care unii o fac între argumente, spunînd că unele se referă la limbaj şi altele la gîndire, nu este adevărată. Este absurd să presupui că există argumente care se referă la cuvinte şi altele care se referă la gîndire, şi deci că ele nu sînt identice." *(De sophisticis elenchis*, 10.)

Putem enunța rezultatele obținute mai sus după cum urmează:

Dacă într-un sistem formal S necontradictoriu se ține seama explicit de condițiile definiției,

$$\text{D1} \quad x R F =_{\text{Df}} x R y \cdot \supset \cdot y \neq F,$$
$$\text{D2} \quad x R F =_{\text{Df}} \sim x R y \cdot \supset \cdot y \neq F,$$

sau de cele care se obțin pentru $y = x$,

$$\text{D1} \quad x R F =_{\text{Df}} x R x \cdot \supset \cdot x \neq F,$$
$$\text{D2} \quad x R F =_{\text{Df}} \sim x R x \cdot \supset \cdot x \neq F,$$

atunci paradoxele nu mai pot fi construite în acest sistem. Într-adevăr, antinomiile presupun definițiile generale de forma

$$x R F =_{\text{Df}} x R y,$$
$$x R F =_{\text{Df}} \sim x R y,$$

sau de forma particulară (pentru $y = x$)

$$x R F =_{\text{Df}} x R x,$$
$$x R F =_{\text{Df}} x R x,$$

și în astfel de definiții $y \neq F$ sau $x \neq F$, conform condițiilor D1 și D2, și deci substituția $y = F$, sau $x = F$, în echivalențele corespunzătoare nu este permisă.

În general, putem crede că s-au definit probleme care sînt complet iluzorii tocmai pentru că ele nu sînt definite. În cele cîteva exemple date am văzut că unele concepte și probleme erau (și sînt) inexistente. Ceea ce este frapant este că aceste probleme sînt dintre cele mai dificile în filosofia și logica epocii noastre. Ar părea astfel că cele mai mari dificultăți de care se izbește inteligența umană nu ar consta în problemele insolubile, ci în probleme inexistente. Este oare acesta cazul tuturor marilor dificultăți? Wittgenstein a afirmat în general (*Tractatus*, prop. 4.003): *„Und es ist nicht verwunderlich dass die tiefsten Probleme eigentlich keine Probleme sind"* („Și nu este de mirare că problemele cele mai profunde nu sînt în realitate probleme").

Revue Roumaine des Sciences Sociales, série de Philosophie et Logique, 3, București, 1967.

Problema paradoxelor logico-matematice

I. INTRODUCERE

La sfîrşitul secolului trecut, un matematician italian, C. Burali-Forti [1], descoperea o contradicţie in teoria mulţimilor: cel mai mare număr ordinal nu este cel mai mare! La început chestiunea a fost considerată ca o curiozitate mai mult decît ca o problemă reală. Dar i-au urmat alte paradoxe: paradoxul lui Cantor (publicat mai tîrziu de Zermelo), acela al lui Russell, al lui Richard, al lui Zermelo-König, al lui Grelling-Nelson etc. şi în sfîrşit cel mai turburător dintre ele, al lui Gödel (pe care unii îl consideră ca o teoremă, nu ca o antinomie).

S-a crezut mai întîi că era vorba de o simplă eroare de logică şi mulţi cercetători s-au înverşunat să le găsească o soluţie prin mijloacele logicii tradiţionale. Bertrand Russell însuşi ne mărturiseşte tentativele lui inutile. Iată ce scrie el textual [2]: „După ce am terminat *Principiile matematicii*, am întreprins o tentativă decisivă pentru a rezolva paradoxele. Consideram aceste paradoxe ca o provocare directă la adresa mea şi, dacă trebuia, mi-aş fi dedicat viaţa mea întreagă în căutarea unei soluţii. Două motive făceau acest lucru absolut dezagreabil. În primul rînd, problema îmi apărea trivială şi detestam faptul că trebuia să-mi concentrez atenţia asupra unor probleme care nu păreau intrinsec interesante. În al doilea rînd, eram atît de extenuat încît nu am putut înregistra nici un progres. În 1903 şi 1904 am lucrat aproape exclusiv la această problemă, dar fără nici o urmă de progres."

La sfîrşit, Russell a propus o teorie personală pentru a rezolva aceste antinomii, teorie denumită de el „teoria tipurilor". Dar această teorie nu era privită cu mare încredere şi această neîncredere era mărturisită chiar de autorul ei, care scria [3]: „Teoria tipurilor nu aparţine într-un mod absolut părţii complete şi sigure a subiectului nostru. Această teorie este încă destul de haotică, confuză şi obscură. Nevoia unei teorii a tipurilor nu este îndoielnică, dar această doctrină aşteaptă o formă precisă."

Alţi logicieni şi matematicieni au căutat o soluţie mai satisfăcătoare decît teoria tipurilor, fără însă a o găsi: Richard, Ramsey, Behmann, Perelman, Quine, Church, Ackermann ş.a. Unii au căutat să perfecţioneze teoria tipurilor, care, pînă astăzi, rămîne totuşi soluţia cea mai acceptată în această problemă.

[1] C. Burali-Forti, *Una questione sui numeri transfiniti* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. XI, 1897).
[2] B. Russell, *My Philosophical Development* (Londra, 1959).
[3] B. Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy* (Londra, 1919).

Caracterul comun al tuturor soluţiilor oferite pînă acum este că sînt convenţionale. Această convenţionalitate a soluţiilor paradoxelor logico-matematice denotă caracterul lor precar, dar este acceptată deschis de către logicieni, în general. De exemplu, iată ce scrie Hans Reichenbach în această chestiune[4]: „S-a pus problema de a şti dacă este necesar să se introducă aceste reguli. Un lucru pare clar: singurul motiv pe care-l putem da pentru astfel de reguli este că ele exclud contradicţiile. Nu se pune chestiunea dacă teoria tipurilor sau a nivelelor de limbaj este adevărată. Aceste teorii reprezintă restricţii la regulile de formare şi prin urmare sînt *convenţii* introduse pentru motivul de a face limbajul nostru coerent".

Toate aceste convenţii provoacă o nelinişte intelectuală, şi sînt logicieni foarte mari care au simţit o veritabilă insatisfacţie faţă de aceste convenţii.

Acceptînd această poziţie convenţionalistă, utilă desigur, dar nu logică, logicienii contemporani au făcut un pas mai departe: ei au acuzat logica clasică de neputinţă şi au contestat chiar posibilitatea de a exprima ceva într-un mod exact în limbajul natural. Dar prin aceasta s-au comis două erori: cei mai mari gînditori, savanţi sau filosofi au gîndit în acest limbaj natural şi conform legilor logice clasice, şi astfel au obţinut rezultatele remarcabile la care au ajuns; nu se poate afirma în mod absolut că au fost explorate toate posibilităţile logicii tradiţionale.

Un lucru rămîne indiscutabil: paradoxele pot fi formulate în cadrul logicii tradiţionale, dar tot aşa şi în cadrul oricărui sistem logico-formal (care nu se apără printr-o convenţie suplimentară); soluţia nu a fost dată, într-un mod logic, nici în logica tradiţională, nici în sistemele logico-matematice. Concluzia este deci: logica tradiţională ca şi logica formalizată dau naştere la paradoxe, şi amîndouă sînt incapabile să le rezolve altfel decît prin axiome convenţionale (cel puţin pînă acum). Prin urmare, sistemele logico-formale ale logicii clasice nu au nici un avantaj, în raport cu logica tradiţională, în problema paradoxelor.

II. TEORIA SCOLASTICĂ A PARTICULELOR SYNCATEGOREMATA

Am văzut că logicienii scolastici acordau o importanţă deosebită unei probleme de logică necunoscute în timpul nostru: problema particulelor aşa-numite *syncategoremata*.

Ei separau cuvintele în două categorii: cuvintele care au un sens autonom, prin ele însele, şi acestea sînt numai substantivul şi verbul, care se numesc *categoremata*; celelalte cuvinte, cum sînt prepoziţiile, conjuncţiile, adjectivele nedeterminate, particulele de legătură, particulele de flexiune etc. care nu au un sens determinat şi autonom, dar care primesc un sens determinat în propoziţii, în raport cu *categoremata* şi pentru aceasta ele se numesc *syncategoremata* (consignificative). Fiecare sens al unei particule de felul acesta era complet precizat, fiindcă fiecare *syncategorema* putea să ia prin accident

[4] H. Reichenbach, *Elements of Symbolic Logic* (New York, 1948).

diverse semnificații, și dacă se confundau aceste sensuri diferite se putea ajunge ușor la un sofism. Prin aceasta ei urmau de aproape ceea ce scrisese Aristotel [5]: „În adevăr, este greu să distingem ce fel de lucruri sînt semnificate de același cuvînt și ce fel de lucruri sînt semnificate de cuvinte diferite. Acela care este capabil să facă această distincție este foarte aproape de adevăr." Această observație a fost făcută și de Ludwig Wittgenstein în timpul nostru [6]: „În limbajul obișnuit se întîmplă adesea ca același cuvînt să aibă o semnificație dublă, și în consecință să aparțină la două simboluri deosebite, sau ca două cuvinte, care semnifică în două feluri diferite, să fie utilizate aparent în același mod. Astfel se nasc erorile cele mai fundamentale (de care abundă filosofia întreagă). Pentru a evita aceste erori, trebuie să întrebuințăm un simbolism care să le excludă, neutilizînd același semn pentru două simboluri diferite, și neutilizînd aceleași semne cînd ele au semnificații deosebite."

Pe scurt, aceste distincții cerute de Aristotel (și recomandate de asemenea de Wittgenstein) au fost făcute de logicienii scolastici prin teoria lor despre *syncategoremata*.

Ne vom ocupa acum mai de aproape de cuvîntul *omnis* — „totul" —, care este numit în logica matematică „operatorul de generalizare" sau „cuantificatorul universal", și care a provocat probleme insolubile.

În tratatul *Syncategoremata* atribuit lui Petrus Hispanus, găsim două sensuri principale pentru *omnis*:

1. *Sensul colectiv*, cînd el are semnificația *universale* (semnificația predicativă), ca în propoziția *Omnes apostoli dei sunt duodecim*, și unde sensul lui *omnes* are puterea să strîngă într-o colecție toți apostolii, construind în felul acesta clasa apostolilor (cu 12 membri).

2. *Sensul distributiv*, ca în propoziția prin care începe *Metafizica* lui Aristotel: *Omnes homines naturaliter scire desiderant*, care se poate traduce în acest mod distributiv: „Fiecare om dorește, în mod natural, să cunoască". Se vede că aici *omnes* nu este întrebuințat *universale* (predicativ), ci *universaliter* (semnificație adverbială, nepredicativă).

Dacă nu se ține seamă de aceste diferențe de sens, se ajunge la sofisme.

Să considerăm exemplul dat, propoziția lui Aristotel, pe care am citat-o *supra*: *Omnes homines naturaliter scire desiderant*. Petrus Hispanus ne dă explicația aceasta: cuvîntul *omnis* este întrebuințat în sensul *universaliter* (adverbial, nepredicativ), ceea ce face ca termenul comun căruia îi este atașat să fie plasat pentru toți termenii săi inferiori—*quia facit terminum communem suum stare pro omnibus suis inferiores*.

Să analizăm acum paradoxele logico-matematice, ținînd seama de cele două sensuri ale cuantificatorului universal *omnis*.

Paradoxul lui Burali-Forti. Se demonstrează în teoria mulțimilor că: 1. orice serie de numere ordinale definește un număr ordinal; 2. acest număr ordinal este mai mare cu o unitate decît cel mai mare număr ordinal al serie considerate; seria de ordinale (în ordinea mărimii lor) este bineordonată. Să considerăm acum seria *tuturor* numerelor ordinale posibile; această serie definește un număr ordinal, să-l notăm cu Ω, care este cel mai mare ordinal

[5] Aristotel, *De sophisticis elenchis*, 7, 100 a.
[6] L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus* (prop. 3 323—3 325).

posibil. În acest caz seria *tuturor* numerelor ordinale conține și numărul ordinal Ω, și deci numărul ordinal definit de această serie nu este Ω, ci $\Omega + 1$. Contradicția este frapantă: cel mai mare număr ordinal nu este cel mai mare!

Soluția. Se poate rezolva acest paradox cu ajutorul teoriei scolastice a particulelor *syncategoremata*. Să considerăm *toate* numerele ordinale posibile, definite mai sus prin seriile de numere ordinale. Pentru a evita orice surpriză, să scriem pe o foaie de hîrtie propoziția:

(1) „Am considerat *toate* numerele ordinale posibile și afirmăm că nu am neglijat nici un număr ordinal, fiindcă numai în felul acesta avem dreptul să spunem că le-am luat pe *toate*, și printre acestea se găsește și cel mai mare ordinal posibil Ω."

Acum să enunțăm propoziția:

(2) „Să considerăm seria *tuturor* numerelor ordinale posibile inclusiv Ω, cel mai mare ordinal; atunci această serie definește un alt număr ordinal $\Omega + 1$, care nu este cuprins în seria *tuturor* numerelor ordinale posibile determinate de afirmația (1)."

Contradicția exprimată de propoziția (2) nu este posibilă. Nu există alt număr ordinal în afară de *toate* numerele ordinale considerate de propoziția (1). Dacă era posibil să gîndim un alt ordinal, adică $\Omega + 1$, atunci el trebuia să se găsească deja printre *toate* ordinalele posibile, pentru că de data aceasta noi nu mai acceptăm că *toți* nu înseamnă *toți*! Atunci urmează că în propoziția (2), „Să considerăm seria *tuturor* numerelor ordinale posibile, inclusiv Ω, cel mai mare", cuvintul *tuturor* nu mai are sensul colectiv, ci distributiv, *syncategorematic*. Propoziția (2) are exact sensul: „Să considerăm fiecare din *toate* numerele ordinale posibile, inclusiv Ω, cel mai mare. . ." și în această propoziție, termenul comun (numere ordinale) este pus *(suppositum)* pentru toți termenii săi inferiori, fără a se realiza o *serie nouă* de ordinale, care nu există, conform propoziției (1). (Vezi, în volum, studiul *Paradoxele în Evul Mediu*.

Clasa tuturor claselor. O serie de paradoxe sînt construite cu „clasa tuturor claselor". Să procedăm ca mai sus și să scriem:

(1) Să considerăm *toate* clasele posibile inclusiv ultima, cea mai mare posibilă Ω:

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \Omega.$$

Putem să afirmăm că le-am luat pe *toate* dacă și numai dacă nu există altă clasă în afară de acestea.

(2) Să luăm acum *toate* clasele posibile din șirul de mai sus; ele formează o nouă clasă ai cărei membri sînt fiecare din termenii acestui șir, inclusiv Ω, fie ea U, care nu se găsește printre *toate* clasele posibile din șirul *tuturor* claselor.

Dar afirmația (2) nu este posibilă, sau mai bine zis ea nu poate fi făcută decît acceptînd pentru *toate* un sens distributiv și anume: „să luăm fiecare din *toate* clasele posibile $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \Omega$" și nu mai există contradicție. Sensul *colectiv* al lui *toate* a fost epuizat de afirmația (1), și în propoziția (2) *toate* este pus *(suppositum)* pentru toți termenii săi inferiori.

Paradoxul lui Cantor. Cantor a întîlnit această contradicţie în 1899, dar nu a fost publicată decît în 1926 de către Zermelo.

Fie M mulţimea *tuturor* mulţimilor şi Nc numărul său cardinal; Nc este cel mai mare cardinal posibil. Pe de altă parte, o teoremă bine-cunoscută din teoria mulţimilor spune: numărul cardinal al mulţimii *tuturor* sub-mulţimilor unei mulţimi M este mai mare decît numărul cardinal al mulţimii M. Prin urmare Nc, cel mai mare cardinal posibil, nu este cel mai mare, deoarece mulţimea sub-mulţimilor mulţimii tuturor mulţimilor are un cardinal mai mare decît Nc. Dar, după cum am arătat, mulţimea (clasă) *tuturor* mulţimilor (clase) presupune sensul *distributiv* al lui *toate*, care nu mai are, în acest caz, puterea de a reuni *toate* mulţimile într-o nouă mulţime (într-o nouă unitate închisă).

O concluzie se impune de la sine: logica matematică, întrebuinţînd cuantificatorul *omnis*, nu a specificat cele două sensuri, colectiv şi distributiv, şi — împotriva indicaţiilor date de Aristotel şi Wittgenstein — nu a făcut nici o distincţie între sensurile diferite ale acestui cuvînt.

III. CONSTRUCŢIA UNOR NOI PARADOXE

1. Paradoxul lui Russell

Russell a descoperit în 1903 un paradox înrudit cu acela al lui Cantor dar avînd o structură logică mai simplă. Se constată că există mulţimi care îşi aparţin ca element şi că există de asemenea mulţimi care nu se conţin ca element. De exemplu, mulţimea tuturor noţiunilor abstracte este ea însăşi o noţiune abstractă, deci ea se conţine ca element al ei; mulţimea tuturor noţiunilor determinate este ea însăşi o noţiune determinată, deci se conţine ca element etc. Dimpotrivă, mulţimea tuturor oamenilor nu este un om, deci nu se conţine etc. Toate mulţimile care se conţin ca element formează o mulţime G; toate mulţimile care nu se conţin ca element formează o altă mulţime Γ. Deoarece orice mulţime se conţine sau să nu se conţine, a treia posibilitate nu există, trebuie ca şi mulţimea Γ să se conţină sau să nu se conţină ca element. Dacă se conţine, cum nu poate conţine decît mulţimi care nu se conţin, prin definiţie nu se conţine; dacă mulţimea Γ nu se conţine, cum prin definiţie ea conţine toate mulţimile care nu se conţin, se conţine! Contradicţia este frapantă.

Mai tîrziu (1905) Russell a arătat că se poate obţine un paradox analog fără a introduce noţiunea de mulţime. Să considerăm un predicat oarecare P; dacă el are proprietatea pe care o denotează, vom spune că are proprietatea *predicabil*; dacă nu acceptă proprietatea denotată de el însuşi, se va spune că el are proprietatea *impredicabil*. De exemplu, predicatul *abstract* este el însuşi abstract, deci el este predicabil; predicatul *imaginabil* este el însuşi imaginabil, deci este predicabil; predicatul *determinat* este el însuşi determinat, deci este predicabil; dimpotrivă, predicatul *mamifer* nu este el însuşi un mamifer, deci este impredicabil etc. Fiind dat un predicat oarecare P, putem spune că el este sau predicabil sau impredicabil, adică admite proprietatea pe care o denotă sau nu o admite, *tertium non datur*. Să punem acum aceeaşi

problemă pentru predicatul *impredicabil*: și el trebuie să fie sau predicabil sau impredicabil, a treia posibilitate nu există. Dacă *impredicabil* este predicabil atunci, conform definiției, admite proprietatea denotată de el și deci este impredicabil; dacă *impredicabil* este impredicabil, atunci are tocmai proprietatea denotată de el și deci este predicabil. Contradicția este manifestă.

2. Paradoxul compatibil-incompatibil

Să considerăm toate predicatele și să le scriem într-o ordine oarecare, de exemplu aceea lexicografică (în ordinea cum sînt scrise în dicționarul unei limbi alese), numerotîndu-le în această ordine:

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_n.$$

Să considerăm iarăși aceleași predicate și să le scriem într-o altă ordine, de exemplu în ordinea lexicografică a terminațiilor lor (sau altfel, printr-o permutare aleasă arbitrar a predicatelor din primul șir); le vom numerota în această a doua ordine astfel:

$$Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \ldots,\ Q_n.$$

Cele două șiruri fiind formate cu aceleași predicate, numărul lor din primul șir și din al doilea este egal. Se poate astfel stabili o corespondență biunivocă între predicatele din primul șir și cele din al doilea: la fiecare predicat de un rang determinat P_k din primul șir corespunde un singur predicat și numai unul din șirul al doilea, anume Q_k și invers. Dacă un predicat dintr-un rang dat din primul șir acceptă ca predicat predicatul de același rang din șirul al doilea, vom spune că predicatul considerat are proprietatea *compatibil*; în caz contrar vom spune că este *incompatibil* cu predicatul corespunzător. În condițiile definite mai sus, oricărui predicat de un rang dat din primul șir îi convine ca predicat predicatul de același rang din al doilea șir sau nu-i convine, *tertium non datur*; orice predicat este compatibil sau nu este compatibil, a treia posibilitate nu există. De exemplu, să presupunem că predicatele care se corespund în rangurile p, q și r sînt în cele două șiruri după cum urmează:

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ \text{Mamifer}_p,\ \ldots,\ \text{Număr}_q,\ \ldots,\ \text{Ordonat}_r,\ \ldots,\ P_n.$$
$$Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ \text{Metal}_p,\ \ldots,\ \text{Abstract}_q,\ \ldots,\ \text{Predicat}_r,\ \ldots,\ Q_n.$$

În acest caz avem: deoarece predicatul $\textit{Mamifer}_p$ nu este un $\textit{Metal}_p$, predicatul $\textit{Mamifer}_p$ este incompatibil cu predicatul $\textit{Metal}_p$; predicatul $\textit{Număr}_q$ este, dimpotrivă, compatibil cu predicatul $\textit{Abstract}_q$; predicatul $\textit{Ordonat}_r$ este compatibil cu predicatul $\textit{Predicat}_r$ etc.

Dar *compatibil* și *incompatibil* sînt ele însele predicate și se găsesc în primul șir și evident și în al doilea. Să ne fixăm atenția asupra predicatului *incompatibil* pe care-l vom nota pe scurt *Inc*. El se găsește în primul șir și de asemenea în al doilea, cu un număr de ordine perfect determinat. Fie numărul de ordine pe care predicatul *Inc* îl are în primul șir h și fie numărul de ordine pe care-l are *Inc* în al doilea șir k: în primul șir el va fi Inc_h și în al doilea Inc_k. Aici avem $Inc_h = Inc_k$, dar $h \neq k$, și putem avea totdeauna

$h \neq k$ prin alegerea convenabilă a ordinii predicatelor. Avem deci cele două șiruri ale acelorași predicate:

$$P_1, P_2, P_3, ..., Inc_h, ..., P_k, ..., P_n.$$
$$Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_h, ..., Inc_k, ..., Q_n.$$

Conform definițiilor date, predicatul P_k, neidentic cu Inc_k, trebuie de asemenea să fie compatibil sau incompatibil cu Inc_k, *tertium non datur*. Dacă predicatul P_k este compatibil cu Inc_k, atunci el admite ca predicat predicatul de același rang din al doilea șir, care este $Inc_k =$ *incompatibil*, deci este incompatibil; dacă predicatul P_k este incompatibil, atunci el admite predicatul din același rang din al doilea șir, deci este compatibil. Antinomia este manifestă.

Se recunoaște imediat că paradoxul lui Russell, format cu predicatele *predicabil-impredicabil*, este numai un caz particular al acestei antinomii, cînd cele două șiruri de predicate au foșt ordonate după unul și același criteriu. În acest caz *incompatibil* devine *impredicabil* $= Imp_h$ și $h = k$:

$$P_1, P_2, P_3, ..., Imp_h, ..., P_n.$$
$$P_1, P_2, P_3, ..., Imp_h, ..., P_n.$$

Enunțul problemei devine acum: dacă un predicat de un rang dat din primul șir admite ca predicat predicatul de același rang din al doilea șir, care este el însuși, atunci predicatul considerat are proprietatea *predicabil* (adică este compatibil cu el însuși), și dacă nu admite acest predicat (adică dacă este incompatibil cu el însuși), el este *impredicabil*. Dacă se pune problema aceasta pentru predicatul *impredicabil* $= Imp_h$, avem paradoxul lui Russell: dacă predicatul *impredicabil* este predicabil, el este impredicabil; dacă predicatul *impredicabil* este impredicabil el este predicabil.

Paradoxul *compatibil-incompatibil* arată că problema este mult mai vastă și nu se reduce la problema aplicării unei proprietăți asupra ei înseși, cum au crezut Russell și scolasticii *(reflexionem supra se)*; în cazul antinomiei construite de noi, ajungem la un paradox considerind un predicat P_k, complet arbitrar și diferit de *incompatibil*, care dacă are o proprietate nu o are, și dacă nu o are o are!

3. **Paradoxul clasei claselor incompatibile**

Să considerăm cele două șiruri de predicate, așa cum au fost definite în paradoxul *compatibil-incompatibil*. O clasă fiind extensiunea unui predicat, aceste două șiruri de predicate determină două șiruri de clase pe care le vom scrie respectiv:

$$p_1, p_2, p_3, ..., p_n.$$
$$q_1, q_2, q_3, ..., q_n.$$

Corespondența biunivocă a acestor termeni se menține.

Putem să exprimăm acum paradoxul *compatibil-incompatibil* în termeni de clase (mulțimi). Dacă o clasă de un rang dat p_x din primul șir *aparține* ca membru clasei de același rang q_x din al doilea șir, vom spune că clasa p_x este compatibilă cu clasa q_x; dacă clasa p_x nu este un membru al clasei q_x,

vom spune că p_x este incompatibilă cu clasa q_x. Referindu-ne la exemplele date în paradoxul *compatibil-incompatibil*, putem, de pildă, să avem eventual cazul următor:

$$p_1, p_2, ..., \text{Cls } Mamifer_p, ..., \text{Cls } Număr_q, ..., p_n.$$
$$q_1, q_2, ..., \text{Cls } Metal_p, ..., \quad \text{Cls } Abstract_q, ..., q_n.$$

În această situație avem: deoarece clasa $Mamifer_p$ nu este un membru al clasei $Metal_p$, clasa $Mamifer_p$ este incompatibilă cu clasa $Metal_p$; clasa $Număr_q$ este un membru al clasei $Abstract_q$, deci ea este compatibilă cu aceasta din urmă etc.

Predicatul *compatibil* determină o clasă G, clasa tuturor claselor compatibile; predicatul *incompatibil* determină o altă clasă, pe care să o notăm cu I, clasa tuturor claselor incompatibile. Aceste clase se găsesc la rangul respectiv în amîndouă șirurile, unde se găsesc predicatele respective. În particular, clasa I ia locul predicatului $Incompatibil = Inc_h$ în primul șir și va fi I_k în șirul al doilea, în locul lui Inc_k:

$$p_1, p_2, p_3, ..., I_h, ..., p_k, ..., p_n.$$
$$q_1, q_2, q_3, ..., q_h, ..., I_k, ..., q_n.$$

(În aceste șiruri $I_h = I_k$ dar $h \neq k$.)

În condițiile definite, orice clasă p_x de un rang dat din primul șir aparține ca element clasei q_x de același rang din șirul al doilea sau nu-i aparține, *tertium non datur*. Paradoxul apare imediat dacă ne punem aceeași problemă pentru clasa $p_k \neq I_k$: clasa p_k este compatibilă sau incompatibilă, ea îi aparține clasei I_k sau nu-i aparține clasei de același rang, *tertium non datur*. Dacă p_k aparține clasei I_k, ea aparține clasei de același rang din al doilea șir, dar, conform definițiilor, I_k este clasa claselor care nu aparțin claselor de același rang din al doilea șir, deci ea nu aparține lui I_k; dacă p_k nu aparține lui I_k, atunci, ea neaparținînd clasei de același rang din al doilea șir, aparține, prin definiție, lui I_k. Paradoxul este manifest.

Se vede că paradoxul lui Russell al clasei claselor care nu se conțin ca element este un caz particular al acestui paradox, cînd cele două șiruri de predicate, și în consecință de clase, au fost ordonate după același criteriu. În acest caz G devine clasa claselor care se conțin ca elemente, și I clasa claselor care nu se conțin ca elemente:

$$p_1, p_2, p_3, ..., I_h, ..., p_n.$$
$$p_1, p_2, p_3, ..., I_h, ..., p_n.$$

Punînd aceeași problemă pentru I_h avem: dacă I_h aparține ca element ei înseși, atunci ea nu-și aparține ca element; dacă nu-și aparține, își aparține ca element.

Ca și în paradoxele precedente, contradicția nu apare în raport cu faptul că o clasă își aparține sau nu ca element, sau că ea este compatibilă sau nu cu ea însăși, cum a crezut Russell, pentru că el a întîlnit paradoxul numai sub forma lui particulară; paradoxul apare de asemenea cînd considerăm o clasă p_k (oricare ar fi ea) total diferită de I_k, ceea ce arată că nodul problemei se găsește în altă parte decît în „reflexivitatea" unor propoziții.

4. Paradoxul lui Grelling-Nelson

Paradoxul descoperit în 1908 de Grelling şi Nelson este analog paradoxului lui Russell construit cu predicatele *predicabil-impredicabil*. Nu mai este vorba acum de clase sau predicate, ci de cuvinte şi proprietăţile lor. Se pot împărţi cuvintele unei limbi date în două categorii: unele care admit proprietatea pe care o denotă şi altele care nu admit proprietatea pe care o denotă. De exemplu, cuvîntul „scurt" este el însuşi scurt, dar cuvîntul „lung" nu este el însuşi lung; cuvîntul „englez" nu este el însuşi englez etc. Vom spune că dacă un cuvînt posedă proprietatea pe care o denotă este *autologic*; dacă nu are proprietatea pe care o denotă el este *heterologic*. Dar un cuvînt dat are proprietatea pe care o denotă sau nu o are, a treia posibilitate nu există. Aşadar, orice cuvînt este sau autologic sau heterologic, *tertium non datur*. Să considerăm acum chiar cuvîntul *heterologic*; urmează că şi el trebuie să fie sau autologic sau heterologic. Dacă cuvîntul „*heterologic*" este autologic, atunci el are proprietatea pe care o denotă şi deci este autologic; dacă cuvîntul „*heterologic*" este heterologic, atunci el are tocmai proprietatea pe care o denotă şi deci este autologic. Iată dar contradicţia.

5. Paradoxul isonom-heteronom

Vom construi acum o antinomie analogă aceleia lui Grelling-Nelson, considerînd cuvintele şi proprietăţile lor. Vom proceda exact ca mai sus şi vom scrie toate cuvintele unei limbi date în două şiruri diferite; de exemplu, primul şir de cuvinte va fi şirul lexicografic normal (ca în dicţionar), iar al doilea, şirul lexicografic determinat de terminaţiile lor (sau altfel, prin permutări determinate în primul şir). Se poate stabili o corespondenţă biunivocă între termenii celor două şiruri: fiecărui cuvînt din primul şir de un rang dat îi corespunde numai un singur cuvînt de acelaşi rang din al doilea şir şi invers. Dacă un cuvînt din primul şir de un rang dat are proprietatea denotată de cuvîntul de acelaşi rang din al doilea şir, vom spune că el are proprietatea *isonom*; în cazul contrar, vom spune că el are proprietatea *heteronom*. De exemplu, în rangurile p, q şi r ar putea să se găsească următoarele cuvinte în cele două şiruri (pe care le notăm respectiv, cu $C_1, C_2, ..., C_n$ şi $D_1, D_2, ..., D_n$):

$$C_1,\ C_2,\ ...,\ Marsupial_p,\ ...,\ Pol_q,\ ...,\ Vertebrat_r,\ ...,\ C_n.$$
$$D_1,\ D_2,\ ...,\ Polisilabic_p,\ ...,\ Lung_q,\ ...,\ Simbol_r,\ ...,\ D_n.$$

În acest caz, cuvîntul $Marsupial_p$ fiind polisilabic este isonom; cuvîntul Pol_q nefiind lung este heternom; cuvîntul $Vertebrat_r$, fiind un simbol al conceptului vertebrat, este isonom.

În cadrul definiţiilor noastre orice cuvînt de un rang dat din primul şir admite ca predicat proprietatea denotată de cuvîntul de acelaşi rang din al doilea şir sau nu-l admite, a treia posibilitate nu există; orice cuvînt este sau isonom sau heteronom, *tertium non datur*.

Cuvintele *isonom* şi *heteronom* se vor aşeza şi ele în şirurile noastre, în ranguri bine determinate; în particular, cuvîntul *heteronom* va avea în primul şir un rang h şi va fi scris pe scurt Het_h; în al doilea şir va avea un rang k

și va fi scris Het_k (putem să facem totdeauna ca $h \neq k$ alegînd ordinea în mod convenabil). Cele două șiruri de cuvinte sînt deci:

$$C_1, C_2, C_3, ..., Het_h, ..., C_k, ..., C_n.$$
$$D_1, D_2, D_3, ..., D_h, ..., Het_k, ..., D_n.$$

Paradoxul apare imediat cînd ne punem aceeași problemă cu privire la cuvîntul C_k: cuvîntul C_k (oricare ar fi) este sau isonom sau heteronom, *tertium non datur*. Dacă C_k este isonom, atunci el are proprietatea denotată de cuvîntul de același rang din al doilea șir, care este Het_k = heteronom, deci este heteronom; dacă C_k este heteronom $=Het_k$, atunci el are tocmai proprietatea de același rang din al doilea șir, deci este isonom. Paradoxul este flagrant.

Se recunoaște de asemenea și în acest caz că paradoxul lui Grelling-Nelson nu este decît un caz particular al acestui paradox, cînd cele două șiruri de cuvinte au fost ordonate după același criteriu și au devenit identice. În acest caz *isonom* devine *autologic* și *heteronom* devine *heterologic*:

$$C_1, C_2, C_3, ..., Het_k, ..., C_n.$$
$$C_1, C_2, C_3, ..., Het_k, ..., C_n.$$

Definiția generală devine acum: dacă un cuvînt oarecare C_x din primul șir are proprietatea pe care o denotă cuvîntul de același rang din al doilea șir, adică proprietatea denotată de el însuși, C_x este *autologic*, și în caz contrar, este *heterologic*. Punînd problema pentru Het_k = *heterologic* avem: dacă *heterologic* este heterologic atunci el este autologic; dacă *heterologic* este autologic el este heterologic!

Această antinomie arată, ca și cele precedente, că nu obținem o contradicție în legătură cu *autoreflexivitatea*, cu aplicarea unei proprietăți ei însăși sau cuvîntului care o denotă, cum au crezut Russell și, în general, logicienii matematicieni, pentru că nu au cunoscut decît forma particulară a acestor paradoxe, unde apare această autoreflexivitate; paradoxul construit mai sus ne arată că ajungem la o contradicție, considerînd un cuvînt C_k (oricare ar fi el, pe care putem să-l facem să fie oricare vrem noi, prin alegerea ordinii în mod convenabil) și care dacă are o proprietate nu o are și dacă nu o are o are!

IV. CONDIȚIILE DEFINIȚIEI ȘI SOLUȚIA PARADOXELOR

Paradoxele construite mai sus ne conduc la două concluzii a căror importanță nu poate scăpa nimănui:

A. *Oricare ar fi teoria adoptată pentru a evita paradoxele cunoscute, putem să construim paradoxe mai generale (compatibil-incompatibil, isonom-heteronom etc.) pe care o astfel de teorie nu le poate evita, pentru că putem să aranjăm, de exemplu, ca P_k și Inc_k (din paradoxul compatibil-incompatibil) să satisfacă teoria tipurilor (sau alte teorii), și totuși P_k nu poate fi nici compatibil nici incompatibil.*

B. *Dacă s-ar găsi o soluție a paradoxelor mai generale, construite de noi, s-ar obține, prin aceasta însăși soluția pentru celelalte paradoxe cunoscute și devenite clasice și care nu sînt decît cazurile lor particulare.*

Să examinăm acum definiţiile generale care se găsesc la baza paradoxelor noastre. Ele sînt de tipul următor:

(a) „Dacă x are predicatul φ (variabil) atunci x are predicatul P".

(b) „Dacă x nu are predicatul φ (variabil) atunci x are predicatul P".

Aceste definiţii nu implică nici o condiţie pentru variabila x şi deci sînt valabile pentru orice x. Sînt ele valabile şi pentru orice valoare a predicatului φ (variabil)? Este evident că aceste definiţii nu pot fi valabile pentru orice φ, căci atunci am fi spus, prin definiţie, pentru $\varphi = P$:

(a') „Dacă x are predicatul P atunci x are predicatul P", adică nu am spus nimic;

(b') „Dacă x nu are predicatul P atunci x are predicatul P", ceea ce este contradictoriu.

Deci, definiţiile (a) şi (b), conţinînd variabila φ, pot degenera într-o definiţie nulă (prima) sau într-o definiţie contradictorie (a doua). Cum şi bazîndu-ne pe ce principiu logic putem elimina definiţiile inadmisibile (a') şi (b'), care pot decurge din formele variabile (a) şi (b)? Acest lucru este posibil, deoarece în logica tradiţională posedăm cîteva reguli care reglementează construcţia definiţiilor. Iată două reguli care ne interesează aici în mod special:

(1) O definiţie nu trebuie construită *idem per idem*, ea nu poate fi tautologică; nu se poate defini definitul prin definit — adică *definiendum* prin *definiendum*, căci atunci nu se defineşte nimic.

(2) O definiţie nu poate fi contradictorie, şi anume nici o *contradictio in terminis*, nici o *contradictio in adjecto*, căci atunci nu se defineşte de asemenea nimic.

Prin urmare, dacă se ţine seamă de aceste două condiţii elementare în definiţiile (a) şi (b), variabila φ nu poate deveni P, fiindcă altfel definiţia (a) devine o definiţie *idem per idem* şi definiţia (b) devine o definiţie contradictorie şi ele nu sînt deci definiţii.

Să utilizăm o scriere simbolică pentru a face mai evidente concluziile precedente.

Să notăm simbolic:

— „x are predicatul φ" prin $\varphi(x)$;

— „x are predicatul P" prin $P(x)$;

— negaţia prin semnul „$\sim$";

— semnul de definiţie va fi „=" alături de care se pune Df.

Definiţiile (a) şi (b) se scriu atunci:

$P(x) = \varphi(x)$ Df. adică „x are predicatul φ" înseamnă „x are predicatul P".

$P(x) = \sim \varphi(x)$ Df. adică „x nu are predicatul φ" înseamnă „x are predicatul P".

Dacă ţinem seamă de cele două condiţii ale definiţiei (1) şi (2), care sînt implicate de orice definiţie, urmează că în aceste definiţii variabila $\varphi \neq P$, fiindcă, dacă facem variabila $\varphi = P$, atunci obţinem

$$P(x) = P(x) \qquad \text{Df.}$$
$$P(x) = \sim P(x) \qquad \text{Df.}$$

prima fiind o identitate şi a doua o contradicţie, deci nu sînt definiţii.

Aceste condiții rămîn valabile oricare ar fi x, deci și in cazul cînd luăm $x = \varphi$, cum apar în paradoxul lui Russell:

$$P(x) = \varphi(\varphi) \quad \text{Df.}$$
$$P(x) = \sim \varphi(\varphi) \ \text{Df.}$$

Și aici $\varphi \neq P$, condiție care rămîne valabilă și în aceste cazuri particulare. Altfel, prima definiție ar deveni o identitate și cealaltă o contradicție.

Prin urmare, cînd enunțăm, de exemplu, în paradoxul *predicabil-impredicabil:* „Dacă un predicat φ (variabil) admite ca predicat pe φ (el însuși), atunci el este predicabil și „dacă un predicat φ (variabil) nu admite predicatul φ (el însuși) atunci el este impredicabil, avem condiția $\varphi \neq$ *impredicabil* sau $\varphi \neq$ *predicabil,* prin condițiile definiției. Chestiunea nu se poate pune pentru predicatele *predicabil* și *impredicabil.* Același lucru pentru clasa tuturor claselor care nu se conțin ca element etc.; această condiție rămîne valabilă pentru toate paradoxele, fie în cazul general al paradoxelor construite de noi, fie în cazul particular al paradoxelor clasice. Se vede dar că condiția $\varphi \neq P$ este introdusă de φ predicat al lui x și nu de x. În definițiile

$$P(x) = \varphi(x) \quad \text{Df.}$$
$$P(x) = \sim \varphi(x) \quad \text{Df.}$$

x nu este supus nici unei condiții, numai φ, predicatul lui x, este supus unei condiții. Dar toate teoriile, prin care s-a încercat să se găsească o soluție a paradoxelor, au căutat o limitare a valorilor posibile pentru „argumentul" x al expresiei $\varphi(x)$, așa fel ca el să nu devină $x = \varphi$, adică pentru a evita formarea expresiilor de forma $\varphi(\varphi)$ sau $\sim \varphi(\varphi)$, care apar în paradoxele devenite clasice. Analiza noastră a arătat că nodul problemei se găsește în altă parte decît în limitarea valorilor variabilei x în expresiile $\varphi(x)$ și $\sim \varphi(x)$. În adevăr, în definiția $P(\varphi) = \sim \varphi(\varphi)$ predicatul φ este obligat să nu fie identic cu P și nu φ argument. Ceea ce Russell și ceilalți logicieni nu au reușit să descifreze în această problemă este rolul dublu al unuia și aceluiași simbol φ în expresiile avînd forma $\varphi(\varphi)$ și $\sim \varphi(\varphi)$ și numai această confuzie a celor două roluri distincte, jucate de același simbol (φ este argument și φ este și predicat al argumentului), a provocat aceste contradicții. Dar aceasta este exact ce spunea Aristotel, și în timpul nostru Wittgenstein, că „același cuvînt semnifică în două moduri diferite . . .", cum am menționat deja la începutul acestor pagini. Și reamintim încă o dată concluzia lui Aristotel, că „acela care este capabil să facă această distincție este foarte aproape de cunoașterea adevărului".

Scientia, vol. 7–8, Milano, 1968.

Matematica și realitatea

1. PROPOZIȚII EXPERIMENTALE ȘI PROPOZIȚII MATEMATICE

Pentru a examina mai de aproape raportul care există între teoriile matematice și realitatea fizică, vom începe prin a ne ocupa mai întîi de concepția neopozitivistă. Această concepție admite că în științele care au ca obiect realitatea fizică există două specii de enunțuri. Unele exprimă un comportament fizic după cum ar fi „plouă", „soarele strălucește", „aurul este galben" etc. Aceste propoziții se bazează pe „o experiență trăită" *(Erlebnis)*, pe un act de aprehensiune primară. Ele se întemeiază, în ultimă analiză, pe date senzoriale, sau pe date oferite de prelungirea simțurilor noastre, adică de aparatele de observație. Enunțurile de acest tip au, în definitiv, o bază empirică, și mulți savanți sînt înclinați să admită această opinie. Într-adevăr, Einstein însuși scria [1]: „Sînt convins că filosofii au avut un efect nociv *(harmful)* asupra progresului științei, schimbînd locul unor concepte fundamentale din domeniul empiricului, unde sînt sub controlul nostru, la înălțimile intangibile ale lui *a priori*".

O a doua specie de enunțuri sînt propozițiile care marchează numai, cum spune Hans Hahn, o dependență între unele caracterizări atribuite unor obiecte. Dacă spunem, de exemplu, „plouă sau nu plouă", acest enunț nu spune nimic despre starea lucrurilor, și nu are nimic să se teamă din partea controlului experimental. Un asemenea enunț poartă numele de *tautologie* (în sensul dat acestui cuvînt de Wittgenstein).

Toate enunțurile pur logice — cum sînt principiul contradicției, al terțiului exclus și toate formulele adevărate ale logicii matematice — sînt tautologii care nu pot spera nici o confirmare și nici o infirmare din partea experienței. Examinînd enunțurile matematice, Hans Hahn găsește că toate aceste enunțuri sînt tautologii, fiindcă, dacă sînt reduse la forma lor cea mai abstractă, ele nu sînt decît formule logice adevărate, adică tautologii. Reducerea matematicii la logică înseamnă astfel reducerea tuturor enunțurilor matematice la schemele tautologice ale logicii matematice. Atunci ce este logica și prin urmare matematica (reduse de logicienii neopozitiviști la logică)? Rolul ei ar fi foarte simplu și ar consta dintr-o „cascadă de transformări tautologice pentru a ne arăta că diversele enunțuri matematice spun același lucru" [2].

Propozițiile din prima categorie (experimentale) au un sens într-atît cît sînt *verificabile* — confirmabile sau infirmabile de experiență. Sensul unei

[1] Albert Einstein, *The Meaning of Relativity*, p. 2 (Methuen, Londra, 1927).
[2] Hans Hahn, *Logique, mathématique et connaissance de la réalité*, p. 34 (Herman, Paris, 1935).

propoziţii de felul acesta, scrie Moritz Schlick, se găseşte în verificarea sa, verificarea unei propoziţii experimentale nefiind niciodată terminată, adică verificarea avînd totdeauna noi controale şi noi ajustări.[3] Prin urmare, adevărul unei propoziţii — în această concepţie — nu ar fi decît o probabilitate.

Această doctrină, cu toate că a făcut mulţi partizani, şi a suferit unele modificări de detaliu la unii neopozitivişti mai recenţi, s-a izbit de o rezistenţă foarte puternică din partea matematicienilor intuiţionişti, şi la fel din partea unor fizicieni dintre cei mai mari, ca de exemplu Max Planck.

Dar intuiţioniştii au ajuns şi ei, în fond, la aceeaşi concluzie logicistă, cel puţin pentru partea „exprimabilă" a matematicilor, care, după ei, este traductibilă în tautologiile logicii formalizate a lui Heyting. Tautologiile logicii intuiţioniste, chiar dacă ele diferă (unele) de logica clasică formalizată (Russell), nu spun nimic asupra realităţii, şi în plus afirmă că întreaga parte exprimată a matematicilor este tautologică şi nu spune nimic asupra realităţii.

La ce servesc atunci toate propoziţiile logico-matematice? Dacă ele se reduc la a nu spune nimic, dacă ele nu au puterea de a spune ceva despre realitatea fizică, care este funcţia lor? Hans Hahn crede totuşi că există o caracteristică a tautologiei: putem să *înţelegem* o transformare tautologică, dar nu putem să înţelegem un fapt sau o observaţie. Dacă sesizăm bine ideea lui Hahn, afirmaţia lui vrea să spună că numai transformarea unui fapt în alte fapte cu ajutorul tautologiilor logice poate fi înţeleasă, faptul individual rămînînd în afară de orice explicaţie. Dar această afirmaţie (specifică pozitivismului în general) are nevoie de unele lămuriri.[4] În adevăr, dacă spunem că apa este compusă din două părţi de hidrogen şi o parte oxigen, este clar că am înţeles ceva, care s-a adăugat observaţiei iniţiale şi intuitive a corpului fluid numit apă. Hahn ar putea să răspundă totuşi: Da, dar aţi spus acelaşi lucru. Şi i s-ar putea răspunde: Este adevărat că am spus acelaşi lucru prin „apă" sau prin „H_2O", dar nu în aceiaşi termeni; dacă corpul numit apă este acelaşi lucru cu corpul numit H_2O,

$$\text{Apă} = H_2O$$

aceasta nu semnifică că am spus *numai acelaşi lucru*, fiindcă l-am spus, într-un mod justificat (cauză a egalităţii logice), *în alţi termeni*. Aceşti „alţi termeni" ne oferă aspecte ale naturii apei şi ne fac să *înţelegem* încă ceva care aparţine acestei naturi.

Se vede dar că toată această neînţelegere se datoreşte faptului că se reduce o teorie matematică la tautologii, fără a putea totuşi să se explicitezе rolul tautologiilor într-o teorie vie, care conţine obiecte fizice.

Analiza spectrală a teoriilor fizico-matematice ajunge la o anatomie formală a acestor teorii, dar ceea ce scapă, în acest fel de examen, este tocmai fiziologia teoriei care rezidă în natura obiectului sau fenomenului studiat.

[3] M. Schlick, *Positivismus und Realismus* (*Erkenntnis*, 3 Bd, 1932).

[4] Ideea că individualul nu este inteligibil îşi are originea în metafizica lui Aristotel. Pentru Stagirit nu există ştiinţă decît a Universalului, ceea ce scolasticii au exprimat prin formula: *Existentia est singularium, scientia est universalium.* Individualul există, dar nu este inteligibil, el nu este obiectul ştiinţei.

2. MATEMATICA ȘI FIZICA

Separația enunțurilor în enunțuri cu date experimentale și enunțuri logico-matematice este fictivă. În adevăr, în matematici se găsesc definiții care, examinate mai de aproape, sînt funcții propoziționale, adică expresii conținînd unul sau mai mulți constituanți nedeterminați, susceptibili de a deveni propoziții cînd atribuim variabilelor valori determinate. Să definim, de exemplu, entitatea matematică numită cerc: „Cercul este o curbă plană ale cărei puncte sînt toate egal depărtate de un punct fix numit centru". (Aceasta este numai una din definițiile cercului.) Această definiție nu definește un cerc, ci o variabilă „cerc", capabilă să ne dea, pentru valori constante atribuite variabilelor care determină centrul și raza, un individ perfect identificat. De exemplu, în plan, în raport cu un sistem cartesian de axe, cercul avînd centrul $C_0(1,2)$ și raza $R_0 = 3$ este un individ matematic perfect determinat. Propoziția „Cercul C_0 are centrul $C_0(1,2)$ și raza $R_0 = 3$" nu este o definiție generală, ci o propoziție care descrie prin elementele lui caracteristice un obiect.

Matematicile nu lucrează decît cu definiții generale și procesul tautologic deductiv nu face decît să transforme aceste funcții propoziționale, care aparțin unei teorii, în alte funcții propoziționale. Tautologiile reprezintă numai scheme de deducție și Wittgenstein o spune clar [5]: „demonstrația unei propoziții semnificative și demonstrația în logică sînt două lucruri diferite". A reduce matematicile la scheme de deducție înseamnă a le răpi obiectul lor împreună cu propozițiile care exprimă aspecte diverse ale acestui obiect. Este adevărat că științele sînt compuse, de asemenea, din scheme deductive, dar ele nu sînt numai atît.

Pe scurt, în matematică se găsesc:

1) obiecte variabile exprimate prin funcții propoziționale (cum este cercul dat ca exemplu mai sus);

2) tautologiile — scheme de deducție.

Aceia deci, care au văzut în matematici numai partea deductivă, adică le-au redus exclusiv numai la schemele formale ale logicii matematice, au privat aceste științe de substanța lor.

Să considerăm acum o propoziție experimentală: „apa este un corp lichid, inodor, incolor etc., care se solidifică la 0°." Această propoziție servește a identifica apa printr-o descriere mai mult sau mai puțin completă. Din punct de vedere logic, cele două propoziții date, atît aceea cu privire la cercul C_0 din plan, cît și aceea a apei, servesc să identifice obiecte. Nu este nici o diferență între ele. Se poate spune cel mult că, în cazul cercului, propoziția care determină această figură particulară C_0 este, pentru a spune așa, secretată de definiția generală, dar în cazul apei propoziția respectivă este mai puțin precisă. Ea utilizează variabilele „lichid" și „punct de solidificare", dar nu știm dacă aceste elemente sînt suficiente pentru a defini un corp în stare lichidă, deși îl putem identifica în felul acesta. În adevăr, să numim starea de agregație λ și punctul de solidificare σ; definiția unui corp prin aceste

[5] L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus* (prop. 6.1263) (ed. Paul Kegan, Londra, 1933).

elemente este atunci dependentă de variabilele λ şi σ şi ea va fi o funcţie propoziţională. Se vede dar cum se procedează în fizică: elementele individualizate ale unui lucru ne sînt date de experienţă şi observaţie. Întemeindu-ne pe aceste date, se pot construi definiţii generale, grupînd împreună lucrurile avînd caractere comune. Logica şi psihologia tradiţionale ne spun că aici are loc un proces de generalizare şi de inducţie. Dar din punct de vedere pur logic, sîntem liberi să formăm o definiţie generală, adică o funcţie propoziţională, chiar de la început, chiar dacă nu cunoaştem nici un lucru cu caractere individualizante, pe care putem apoi să-l considerăm în general ca o variabilă. Aceasta se întîmplă, de altfel, tot timpul în matematici, unde se creează obiecte şi proprietăţi pur matematice, dintre care unele îşi găsesc mai tîrziu aplicaţii fizice.

Experienţa şi observaţia ne sugerează definiţii generale, dar, ca şi în matematici, le putem „crea" în mod liber, înainte de orice experienţă şi observaţie.

Acest lucru s-a petrecut, pentru a da un exemplu, cu sistemul periodic al lui Mendeleev. Acest tablou se reduce, în fond, la stabilirea unei funcţii propoziţionale, care ne va da un corp simplu prin proprietăţile sale în funcţie de greutatea atomică respectivă. Dar unele corpuri nu erau cunoscute, cînd s-a enunţat funcţia propoziţională respectivă, şi ele au fost descoperite treptat, încadrîndu-se perfect în acest sistem.

Se poate constata, în fiecare caz aparte, că ştiinţele matematice încep numai în momentul cînd se pot enunţa definiţii generale, adică funcţii propoziţionale, altfel nu s-a depăşit stadiul experienţei şi observaţiei. Şi dacă cei vechi au avut dreptate să afirme, împreună cu Aristotel, că nu există ştiinţă decît a generalului, oare nu am putea spune, în limbajul contemporan, că nu există ştiinţă decît a funcţiilor propoziţionale, adică nu există altă ştiinţă propriu-zisă (ştiinţă teoretică) decît matematicile?

În adevăr, legea atracţiei universale a lui Newton, de exemplu, nu se referă la un corp determinat; dacă Newton ar fi enunţat acest adevăr celebru referindu-se la un singur măr care, căzînd dintr-un pom, ar fi căzut într-un fel anume, adică în raport direct cu masa şi în raport invers cu pătratul distanţei, nimic nu ar fi putut fi dedus din acest fapt izolat. El nu ar fi putut conchide nimic interesant, de asemenea, dacă ar fi constatat că toate merele cad în modul acesta, cu toate că o asemenea constatare ar fi dus la o serie de consecinţe importante cu privire la modul de a se comporta al merelor. Dar din momentul cînd Newton a construit definiţia generală a forţei de atracţie

$$F = \frac{m_1 m_2}{d^2},$$

care spune că două corpuri materiale de mase m_1 şi m_2 se atrag în raport direct cu masa şi în raport invers cu pătratul distanţelor, această definiţie a forţei de atracţie a putut să fie aplicată la toate corpurile, merelor ca şi celor mai îndepărtate astre. Forţa de atracţie F este o funcţie propoziţională, o definiţie, în care intră trei variabile, m_1, m_2 şi d. Newton putea să imagineze şi să formuleze această definiţie înainte de a face experienţa, banală prin ea însăşi, care i-a sugerat-o. Mai mult, libertatea matematică ne dă posibilitatea de a crea tot felul de definiţii ale forţei F, de exemplu, în raport direct cu pătratul maselor şi în raport invers cu cubul distanţelor şi în general orice funcţie de m_1, m_2 şi d:

$$F = f(m_1, m_2, d).$$

De fiecare dată, adică pentru fiecare precizare a combinării variabilelor m_1, m_2 și d, vom avea un Univers în care lucrurile se vor petrece într-un mod specific. Newton a crezut că este cel mai aproape de experiență fiindcă aceasta i-a sugerat formularea:

$$F = \frac{m_1 m_2}{d^2}.$$

Dar Einstein a arătat totuși că legea lui Newton nu este decît o aproximație foarte bună pentru forța F în sistemul nostru. De altfel, pentru a scăpa de unele dificultăți introduse prin legea lui Newton, unii oameni de știință au căutat, chiar înainte de Einstein, să găsească o expresie modificată a ei. De exemplu, Seeliger a considerat că pentru atracțiile maselor la distanțe foarte mari trebuie să se ia o expresie mai „tare" a acestei legi, și nu în raport invers cu pătratul distanței maselor care se atrag.

Experiența ne sugerează funcții propoziționale, dar nu putem ști dacă ceea ce ne sugerează experiența noastră, limitată în timp și spațiu, poate fi aplicat la Universul întreg.

În rezumat, practica ne arată că, în adevăr, procedeele logice în științele cu bază empirică sînt exact de aceeași natură cu acelea din științele matematice. În fizică și în chimie avem propoziții în care nu intră decît constante, ca și în matematici; în orice știință, ca și în matematici, putem să formulăm funcții propoziționale, adică definiții generale construite cu variabile și care vor da loc la teoreme sau teorii matematice.

Prin urmare nu se pot separa propozițiile matematice de cele experimentale. Din punct de vedere pur logic, toate propozițiile pot fi clasate în două categorii:

1. propoziții în care intră numai constante;
2. propoziții în construcția cărora se găsesc variabile.

Aceste două categorii de propoziții se găsesc în toate științele naturii ajunse la stadiul teoretic, în fizică, în mecanică, în astronomie etc. Singura diferență este că, pe cînd în matematici orice propoziție formulată numai cu constante este un rezultat obținut înlocuind variabilele prin valori date într-o funcție propozițională, în științele care se referă direct la realitatea fizică, găsim mai întîi propozițiile constante și apoi încercăm, și de multe ori izbutim, să formulăm funcțiile propoziționale care le corespund. Dar aceste propoziții constante sînt mai rar formulate într-un mod complet și astfel este foarte dificil să se vadă care sînt funcțiile propoziționale (cu variabile) care le corespund. Observațiile noastre, formulate în propoziții constante, sînt fragmentare și de aceea este dificil de a formula funcția propozițională corespondentă. De unde libertatea de a *imagina* diferite funcții propoziționale care ar putea da naștere la propozițiile constante. Aceasta înseamnă că avem posibilitatea de a construi teorii matematice diferite pentru aceleași fapte și aceasta ne-o arată însăși știința. În cazul nostru, legea atracției a lui Newton, se studiază experimental căderea corpurilor și se constată care este accelerația lor. În acest caz, formulele pentru F trebuie să fie capabile să ne dea, pentru unele valori particulare ale variabilelor, situația de fapt. Newton a ales o expresie pentru F, Seeliger alta, Einstein o alta.

Să considerăm exemplul apei, cînd am scris:

$$\text{Apa} = H_2O.$$

Dacă H și O ar fi în mod absolut niște constante, această propoziție ar determina complet apa. Dar H și O sînt funcții de protonii și de electronii lor, și aceștia sînt, la rîndul lor, funcții de o necunoscută care poartă numele de electricitate. Cînd spunem „apa este H_2O", transformăm o expresie în alta, dar mai rămîne aici o necunoscută care face totuși, cu toate că nu este exprimată explicit, ca această expresie să nu fie decît o funcție propozițională. În adevăr, această necunoscută este electricitatea și, atît timp cît nu știm ce este ea, propoziția „apa este H_2O" este o funcție propozițională care exprimă corpul „apă" cu ajutorul a două elemente definisante H și O, variabile, căci ele depind de necunoscuta „electricitate", pe care putem să o notăm cu q, dar nu știm ce este q.

În modul acesta și-a pus problema N. R. Campbell [6]. Dacă vrem să facem o teorie matematică a electricității și dacă această teorie comportă introducerea cantității de electricitate, fie q, atunci va trebui să știm în fiecare caz particular care este valoarea lui q. Cînd ne întrebăm: „Ce este electricitatea?", răspunsul este: „Electricitatea este ceea ce am notat în formulele noastre prin q."

Această afirmație nu este considerată de Emile Borel ca un cerc vicios. [7]

Desigur, există filosofi și oameni de știință care cred că va veni un moment cînd se va ști ce este electricitatea. Altfel spus, se imaginează că se vor găsi elementele cele mai simple (altele mai simple nemaifiind posibile) cu care se va putea defini q. Dar în concepția de astăzi a științei, elementele primitive (concepte primitive și propoziții primitive) sînt relative și se poate construi o altă teorie plecînd de la alte elemente primitive.

Acum putem să ne explicăm de ce matematicile se aplică realității fizice: fiindcă tot ce exprimăm în general asupra realității fizice se exprimă prin funcții propoziționale (expresii cu variabile), sau pur și simplu prin funcții, și matematicile nu fac altceva decît să „creeze" aceste funcții și să stabilească echivalența lor prin schemele tautologice deductive. Expresiile generale, pe care le enunțăm asupra realității, conțin explicit sau implicit una sau mai multe variabile (necunoscute). Dar în acest mod ajungem la o concluzie paradoxală: nu putem studia realitatea fizică într-un mod matematic, adică teoretic, decît fiindcă tot ce știm despre ea implică cel puțin o necunoscută, adică fiindcă nu o cunoaștem bine! Dacă tot ce știm despre realitatea exterioară s-ar traduce prin propoziții particulare, fără nici o legătură funcțională între ele, am cunoaște realitatea fizică, dar nu în mod matematic. *A cunoaște în mod matematic natura înseamnă deci a o cunoaște în funcție și de ce nu cunoaștem despre ea.*

Aceasta arată că modalitatea matematică de a cunoaște lumea fizică are nevoie să fie scrutată mai de aproape.

3. NATURA „MATEMATICĂ" A REALITĂȚII FIZICE

Din punctul de vedere al logicii formale, procedeul matematic are o dublă față: 1) crearea unui obiect nou, sau punerea în valoare a unui aspect

[6] N. R. Campbell, *Les Principes de la physique* (trad. fr., Alcan, Paris, 1929).

[7] În prefața la cartea lui Campbell citată.

nou (relaţie) aparţinînd unui obiect deja dat; 2) procedeul deductiv general care garantează dreptul de cetate enunţului pe care-l introduce în corpul teoriei respective.

Creaţia — sub toate aspectele ei — este formulată în funcţii propoziţionale; funcţia raţionamentului este de a echivala aceste funcţii pentru a asigura necesitatea concluziilor. Faptul că matematica se aplică realităţii ca o mănuşă se datoreşte posibilităţii nelimitate pe care o avem, în raport cu necunoscutele naturii, de a crea funcţii propoziţionale variate; acestea definesc o lume, dar o lume modificabilă în timp. Aceasta înseamnă că, deoarece realitatea fizică poate fi enunţată în funcţii propoziţionale, ea este definită matematic, fiindcă tocmai la aceasta revine faptul de a enunţa funcţii propoziţionale în care realitatea este cuprinsă. Dumnezeul lui Leibniz crea lumea calculînd; Dumnezeul matematicienilor-logicieni o creează definind-o.

Din momentul cînd oarecare entităţi matematice au fost create şi enunţate prin funcţii propoziţionale, s-a creat în acelaşi timp posibilitatea ca două funcţii să fie echivalente, adică astfel ca realitatea să se transforme matematic. Şi într-adevăr, realitatea suferă o transformare matematică, dovadă fiind tocmai această situaţie generalizată, că faptele se supun calculului matematic.

Prin urmare, din punct de vedere pur logic, şi deoarece realitatea se lasă exprimată matematic, ea nu este decît un sistem de definiţii (exprimate cu ajutorul funcţiilor) şi de transformări ale acestor definiţii în altele echivalente. Natura matematicilor arată care este natura realităţii fizice şi această natură este de ordin matematic. Dar în ce sens? Dacă trebuie să tragem o concluzie din această identitate de natură incontestabilă, atunci trebuie să spunem că natura, ca şi matematicile, nu spune, prin transformările sale, decît acelaşi lucru, dar în termeni diferiţi. Există într-adevăr o valoare ontologică a matematicilor, în sensul că demersurile înseşi ale naturii sînt de ordin matematic sau de ordin logico-matematic (idee care se găseşte chiar la Aristotel). Dacă echivalenţa transformărilor este exactă, nu se produce nici o augmentare şi nu se întîmplă nimic prin aceste transformări. Din cauza naturii matematice a realităţii fizice sîntem obligaţi să conchidem că această realitate este unică şi că numai definiţiile ei echivalente o fac să apară diversă şi metamorfozată. Realitatea însăşi, din cauza naturii ei matematice, se exprimă tautologic şi aceasta demonstrează că ea nu este decît aceste transformări. [8]

Cercetările moderne, care au stabilit *natura identică* a materiei şi radiaţiei, de exemplu, constituentul ultim fiind electricitatea, totul nefiind decît forme diverse şi transformările lor unele în altele ale acestui ultim element, arată că concluzia noastră teoretică este valabilă de asemenea prin proba ei practică. Mai mult încă, principiul conservării materiei şi principiul conservării energiei (care în fond nu sînt decît un singur principiu, dacă materia şi energia sînt identice în natura lor) arată într-un mod matematic şi expe-

[8] Concepţia după care ştiinţa caută identitatea între lucruri diverse a fost susţinută, cu o erudiţie impresionantă, de Emile Meyerson. A. Lalande a făcut de asemenea din identitate condiţia inteligibilităţii. După el, travaliul raţional urmăreşte analogia în lucruri, fiind de dorit ca acesta să pătrundă cît mai adînc posibil în interiorul lor. „Limita acestei înţelegeri ar fi — scrie el — reducerea ideală a cunoaşterii în întregime la o formă pur inteligibilă, care ar absorbi complet individualul în identic.” (A. Lalande, *La Dissolution opposée à l'évolution*, p. 212—213, Paris, 1899.)

rimental (prin experienţele care au verificat principiile), că natura materială trece tot timpul printr-o serie nelimitată de transformări, rămînînd în permanenţă egală cu ea însăşi. Aceste principii nu exprimă decît faptul subliniat mai sus: echivalenţa de principiu a tuturor acestor transformări prin care trec materia şi radiaţia, adică natura tautologică (în sensul matematic de echivalenţă) a acestor transformări.

Chestiunea: „Cum se poate explica aplicarea, cu un succes complet, a matematicilor la realitatea fizică?" va căpăta acum un răspuns complet; acest lucru este posibil pentru că realitatea, în ultima analiză, este o „necunoscută" unică şi care ia forme variabile, exprimate astfel în funcţii propoziţionale, a căror echivalenţă spune totdeauna acelaşi lucru cu alţi termeni. Această ultimă realitate, scrutată mai de aproape, apare astăzi cînd în formă corpusculară, cînd în formă de unde, în funcţie de cum o întrebăm.

Vom fi noi vreodată capabili, într-un viitor nedeterminat, să sesizăm în mod matematic realitatea în natura ei ultimă şi cea mai intimă?

Dacă s-ar considera că s-a găsit, la un moment dat, ultimul element al materiei, dincolo de care natura nu ne mai poate oferi nimic, atunci acest element, ca atare, va trebui să fie acceptat în mod *ipotetic*. El ar fi acceptat însă fără explicaţie, fiindcă explicaţia lui ar cere alte elemente mai simple, şi atunci acestea ar fi prime şi nu elementul considerat.

Prin urmare, acceptarea unui element ultim al materiei nu poate fi decît o convenţie. Dar în acest caz, prin aceasta însăşi, există posibilitatea de a crea o altă teorie a materiei plecînd de la o altă interpretare a elementului ultim.

Vom conchide oare atunci că elementul ultim al realităţii va rămîne necunoscut şi că Du Bois-Reymond avea dreptate să spună *ignorabimus*?

Există totuşi o altă explicaţie a acestei situaţii, care nu admite nici o enigmă la baza realităţii, fără a accepta poziţia lui Du Bois-Reymond. Într-adevăr, afirmaţia că nu vom cunoaşte niciodată natura substratului unic, pe care-l numim acum electricitate, care se transformă tautologic, conţine o eroare. Dacă cea mai înaltă formă de cunoaştere ştiinţifică este forma matematică, atunci substanţa ultimă a realităţii fizice ne este cunoscută într-un mod matematic. Această substanţă ne prezintă mereu alte semne; dar ea nu este decît seria tuturor acestor semne, adică fenomenele şi transformările lor echivalente. A spune că realitatea fizică este mai mult decît atîta înseamnă să aluneci în mod imprudent într-o problemă fictivă, datorită unei mentalităţi care are nevoie să vadă dincolo de fapte.

Am vorbit totuşi şi noi de o „materie", identică în toate transformările ei şi care rămîne aceeaşi. Am utilizat limbajul curent, însă am ajuns la punctul în care lucrul poate fi explicat. Această manieră de a vorbi voia numai să spună că natura lucrurilor şi a fenomenelor este identică şi arată de ce transformările se fac prin echivalenţe. Dar aceste transformări sînt totul. A cunoaşte natura realităţii fizice şi a şti că această natură se exprimă matematic înseamnă a o cunoaşte pur şi simplu, şi este în natura ei de a se arăta totdeauna divers ca fiind acelaşi lucru. Dacă traducem această identitate de natură, exprimată prin ecuaţii matematice ale realităţii fizice, printr-o „materie" sesizabilă numai prin elemente exterioare, dar ea însăşi rămînînd necunoscută, am introdus un element în plus, el însuşi rămînînd inexplicabil. Dar dacă renunţăm la asemenea explicaţii materia dispare ca element individualizat şi nu rămîn decît aceste reflexe care se transformă continuu

unele în altele, într-un mod echivalent, fără nici un mister subteran, fiindcă sînt totdeauna acelaşi lucru, fără o „realitate" proprie fiecăruia, fiindcă fiecare este echivalent cu altele, dar exprimat altfel. A păstra o materie independentă de modificările ei este o iluzie. Materia există prin această devenire continuă, transformarea faptelor fizice în altele echivalente.

Aristotel însuşi a considerat materia ca un concept-limită. În acest sens el a fost obligat să vorbească de *materie primă*, materia primă nefiind decît posibilitatea pură, *esenţa* sau *forma* fiind realitatea. Această materie primă nu este definită, nu este inteligibilă, sau cum o spune Stagiritul, textual [9]: „În ceea ce priveşte materia, ea nu poate fi cunoscută". Materia pură, nedeterminată, ca „realitate în sine", nu există decît ca o posibilitate concepută de inteligenţa umană. Transformările constituie întreaga materie, care nu trebuie înţeleasă ca un substrat al acestei deveniri, deoarece ea este în şi prin această devenire.

Apare foarte curios faptul că cercetările ştiinţifice au fost îndreptate — de la începutul Renaşterii —, printr-o sugestie de o putere formidabilă, în direcţia căutării unei realităţi ascunse, sau ale cărei fenomene îi servesc numai de „acoperire". Această idee a orientat toate investigaţiile ştiinţifice ale naturii şi se găseşte la baza tuturor explicaţiilor fenomenelor, anume în sensul unei „penetraţii" în domeniul de dincolo chiar de limitele investigaţiei. A sonda natura însemna, graţie acestei sugestii, a ajunge la ceea ce depăşeşte însuşi sondajul.

Renunţarea la această concepţie directoare înseamnă a găsi adevăratul sens al ştiinţei şi în acelaşi timp al fenomenelor fizice, recunoscînd prin aceasta unitatea lor şi valoarea independentă a fiecăruia dintre ele. Este vorba deci de o nouă epistemologie, pe care o vom numi *orizontală*, faţă de epistemologia *verticală*, dominantă pînă acum, datorită sugestiei de care am vorbit.

Realitatea fizică este astfel o devenire continuă, pe care o putem cunoaşte, pentru că nu presupune un substrat enigmatic, care ar fi destinat să-i dea un fundament, dar care nu ar putea să se fundeze el însuşi. Inteligenţa umană cunoaşte aceste reflexe ale transformărilor, care spun toate acelaşi lucru, dar în alţi termeni; dincolo de aceste transformări echivalente nu mai este nimic şi de aceea nu putem spune *ignorabimus*, fiindcă nu mai e nimic de cunoscut. Nu vom cunoaşte niciodată seria întreagă a tuturor transformărilor posibile, deoarece seria aceasta este infinită. Dar vom cunoaşte totdeauna mai mult: devenirea unui lucru, transformarea lui creatoare într-un alt lucru. Şi în aceasta consistă rolul cunoaşterii matematice. Ea este, prin natura ei însăşi, o cunoaştere orizontală.

Acest caracter al cunoaşterii „matematice" a naturii a fost remarcat şi de unii gînditori de altădată. De exemplu, Spinoza scria: *Intellectus actu finitus aut actu infinitus, Dei attributa Deique affectiones comprehendere debet, et nihil aliud* („Intelectul, fie finit, fie infinit, trebuie să cunoască atributele lui Dumnezeu şi modificările lor, şi nimic altceva"). Şi pentru Spinoza Dumnezeu era Natura: *Deus sive Natura*.

Scientia, vol. 9—10, Milano, 1969.

[9] Aristotel, *Metafizica*, VII, 10, 1036 a.

Teorie și sistem

I. INTRODUCERE

Știința era o *teorie*. Termenul intrase în circuitul conceptelor acceptate ca fiind de la sine înțelese, ca o veritabilă idee carteziană, care avea suportul în propria ei evidență.

Epoca noastră a transformat teoria — adică știința — într-un *sistem*. Consecințele sînt incalculabile, după cum vom arăta în cele ce urmează.

Să explicăm însă, mai întîi, într-un mod intuitiv, diferența care există între „teorie" și „sistem".

Primul gînditor care a făcut o teorie a științei, stabilind structura însăși a unei teorii, este Aristotel. Se cuvine deci să căutăm semnificația termenului „teorie" în limba filosofilor greci.

Cuvîntul „teorie" — θεωρία — are sensul originar de „contemplație", „viziune" și numai prin practica științei el a luat înțelesul de „cunoaștere științifică" sau de „cercetare științifică". Dar trebuie să ne amintim totdeauna că, pentru filosofii greci, această cunoștință avea o bază în viziunea intuitivă intelectuală. De altfel, adevărul demonstrat în corpul unei teorii purta numele de „teoremă" — θεώρημα —, care avea semnificația de cunoaștere datorită intuiției, viziunii directe. Acest lucru mai urmează încă și din faptul că intelectul activ, sursă a intuițiilor intelectuale prime (despre care vom vorbi mai departe), este conceput de Aristotel ca fiind „asemenea luminii" — οἷον τὸ φῶς [1]. Și numai prin lumina proiectată de intelectul activ, care apare în *lógos-ul apophantic* — λόγος ἀποφαντικός —, adică în judecată, adevărul este adus la lumină. (*Apophansis* conține ideea de φῶς = lumină.)

Pe scurt, teoria avea, la Aristotel, o bază intuitivă intelectuală de vedere directă a adevărului și era legată ontologic și noetic de realitate și de intelect.

Noțiunea de sistem a înlocuit, în timpul nostru, noțiunea de teorie științifică. Această denumire (de „sistem") apare deja la sfîrșitul Evului Mediu și, mai ales, în Renaștere. O mulțime de logicieni ai acestei epoci se numesc ei înșiși „sistematici". Pentru acești gînditori, logica (ca și alte discipline) este concepută ca un „sistem", caracterul principal al acestuia fiind acela de „metodă" sau „procedeu metodic". Primul „sistematic" pe care-l întîlnim în decursul istoriei este Bartolomaeus Keckermannus, a cărui operă principală (publicată postum) purta titlul de *Systema systematum — Sistemul sistemelor* (Hanovra, 1613). După el, se găsesc nenumărate lucrări

[1] Aristotel, *De anima*, 5, 430 a, 15.

„sistematice", dintre care cea mai influentă a fost celebra carte a lui J. H. Alstedius, *Logicae systema harmonicum — Sistemul armonios al logicii* (Herbonae, 1614) [2].

Să vedem acum care este sensul etimologic al termenului „sistem". Acest cuvînt vine din grecescul σύστημα, format cu particulă σύν (cu) și verbul ἱστάω (a sta în picioare). Cu alte cuvinte, σύστημα înseamnă „a sta cu", „a fi pus cu alții", „a fi legat împreună", „a fi acordat într-un ansamblu cu alte părți".

Rezultă că deosebirea dintre teorie și sistem este următoarea: *teoria are baza sa de sprijin în afara ei și sistemul se fondează exclusiv pe construcția lui interioară.*

Teoria presupune, desigur, și ea, o structură coerentă interioară; dar existența ei nu se datorește exclusiv acestei structuri, care este ea însăși un rezultat determinat din afară. Cu alte cuvinte, teoria presupune sistemul ei, dar nu se reduce la acesta, care este numai un aspect al teoriei sau una din condițiile ei, condiție necesară, dar nu suficientă pentru ca un corp de termeni și propoziții să constituie o teorie veritabilă.

Această concluzie, obținută numai prin examinarea sensului intuitiv al celor două noțiuni considerate, va fi examinată acum într-un mod riguros. Vom arăta care sînt rezultatele care au fost provocate prin substituirea „sistemului" ideii de „teorie" în epoca noastră.

II. CONCEPTUL DE TEORIE LA ARISTOTEL

Iată cum rezumă E. W. Beth teoria aristoteliciană a științei [3]:

O știință deductivă este un sistem *S* de propoziții, care satisface postulatele următoare:

(1) Orice propoziție care aparține lui *S* trebuie să se refere la un domeniu specific de entități reale.

(2) Dacă o propoziție oarecare aparține lui *S*, ea este adevărată.

(3) Dacă o propoziție oarecare aparține lui *S*, orice consecință logică a acestei propoziții trebuie să aparțină lui *S*.

(4) Există în *S* un număr (finit) de termeni, astfel că:

a) semnificația acestor termeni este prea evidentă pentru a mai fi necesare alte explicații suplimentare;

b) orice alt termen din *S* este definisabil cu ajutorul acestor termeni.

(5) Există în *S* un număr (finit) de propoziții, astfel că:

a) adevărul acestor propoziții este prea evident ca ele să mai aibă nevoie de o altă dovadă;

b) adevărul oricărei alte propoziții care aparține lui *S* poate fi stabilit prin inferență logică plecînd de la aceste propoziții.

[2] A se vedea, pentru dezvoltări asupra noțiunii de „sistem", și apariția „sistematicilor", lucrarea lui W. Risse, *Die Logik der Neuzeit* (Stuttgart, 1964).

[3] E. W. Beth, *The Foundations of Mathematics* (Second revised edition, Amsterdam, 1965).

Postulatele (1), (2) și (3) sînt numite de Beth, respectiv, *realitatea, adevărul* și postulatul de *deductibilitate (deductivity)*. Postulatele (4) și (5) împreună sînt așa-numitele *postulate de evidență*; în sfîrșit, termenii și propozițiile fundamentale specificate de postulatele (4) și (5) sînt numite *principiile* unei științe.[4]

Am putea accepta, *grosso modo*, că știința teoretică, în concepția lui Aristotel, avea această structură. Dar vom atrage atenția că, în concepția Stagiritului, „știința are ca obiect universalul și constă din propoziții necesare" [5].

Este de remarcat că cei care au discutat concepția științei la Aristotel au făcut abstracție de faptul că ea este, mai ales, „știința universalului", ceea ce logicienii scolastici nu au încetat să repete: *scientia est universalium* sau încă *nulla est scientia fluxorum* („știința este a universalelor" sau încă „nu există știință a celor efemere"). Beth, ca de altfel în general toți logicienii și matematicienii contemporani, care s-au ocupat de concepția aristoteliciană a științei, s-au mărginit numai la analiza științei apodictice concepută exclusiv ca știință a demonstrației. Dar, dacă „nu există știință decît a universalului", pentru a lămuri conceptul de știință la Aristotel, ar trebui să se înceapă prin a se explica mai întîi conceptul de universal — τὸ καθόλου,, ceea ce nu au făcut nici Beth, nici, înaintea lui, F. Enriques [6], I. Bocheński [7] etc. Universalul este însă sesizat în definiție (care tocmai pentru aceasta nu poate fi decît universală).

Fără a aprofunda noțiunea de universal și de definiție care exprimă esența — τὸ τί ἐστί — unui lucru, nu se poate înțelege teoria științei așa cum a fost elaborată de Aristotel.

Universalul aristotelic nu este generalul, cum se înțelege obișnuit. Iată ce spune Aristotel că este universalul: „Numim universal ceea ce este totdeauna și pretutindeni" — ἀεὶ καὶ πανταχοῦ [8]. Acest concept de „universal", care este specific științei grecești, a fost pierdut de știința modernă (cu unele extrem de rare excepții), care a redus universalul la noțiunea extensivă pură de „mulțime matematică" sau de „clasă" și, prin aceasta, a sărăcit nu numai gîndirea filosofică, dar și pe aceea matematică și logică.

Este adevărat, pe de altă parte, că conceptul de „universal", în sensul grecesc al cuvîntului, este aproape insesizabil pentru gîndirea modernă. Acest lucru a fost semnalat de John Burnet [9] și într-un mod mai sistematic de Nicolai Hartmann [10]. Pentru Hartmann, obiectul științei lui Socrate, Platon și Aristotel era „universalul". Dar el arată că „universalul" nu era conceptul abstract al gîndirii moderne, care este o construcție abstractă a spiritului omenesc. Referindu-se la această problemă, eruditul istoric al filosofiei Aram Frenkian își pune următoarea problemă: *„Cum și prin ce*

[4] A se vedea, în ceea ce privește axiomatica lui Aristotel, H. Scholz, *Die Axiomatik der Alten* (Blätter für deutsche Philosophie, vol. 4, 1930–1931).

[5] Aristotel, *Analiticele secunde*, I, 33, 88 b.

[6] F. Enriques, *Il concetto della logica demonstrativa secondo Aristotile* („Rivista di filosofia", ianuarie 1918).

[7] I. M. Bocheński, *Elementa logicae graecae* (Roma, 1937).

[8] Aristotel, *Analiticele secunde*, I, 31, 87 b.

[9] J. Burnet, *Greek Philosophy*, I (Londra, 1914).

[10] N. Hartmann, *Aristoteles und das Problem des Begriffs* („Abhandlungen der Preuss. Akad. der Wissenschaft", 19, 1939).

poate să difere universalul de concept?" sau încă: *„Ce este universalul dacă el nu este conceptul?"* După ce analizează diverse texte (în special dialogul platonic *Menon*), Frenkian conchide [11]: „Din ceea ce precedă, devine clar că ideea de *universal* exprimată de cuvîntul grec καθόλου nu are nimic de-a face, la Platon, cu conceptul abstract. Raportul ideilor cu lucrurile sensibile este, la Platon, complet răsturnat în comparaţie cu punctul de vedere modern. [...] Ascensiunea pînă la totalitatea Formei este o îmbogăţire. Operaţia inversă, fragmentarea Formei în lucrurile sensibile, care privesc numai o parte din ea, este o sărăcire. [...] Se înţelege deci că universalul nu are nimic comun cu conceptul. Platonicianul καθόλου este totalitatea unei forme, a Formei pline şi bogate, care se opune fragmentării ei în lucrurile sensibile, unde nu atinge decît realizări parţiale [...]. Marii gînditori ai Atenei, Socrate, Platon, Aristotel, nu caută să fixeze printr-o definiţie un concept abstract, ci Forma totală şi completă, care conţine esenţa lucrurilor."

Este vizibil că o mare parte din gîndirea modernă, despărţindu-se de universal, adică de ontologie, de fiinţa purtătoare a esenţelor, şi-a pierdut întreaga ei tradiţie grecească. Şi, în acest sens, pe bună dreptate, spunea Hegel „comoara lui Aristotel este de secole ca şi necunoscută" [12].

Fără a putea dezvolta această temă aici, subliniem că absenţa teoriei universalului în redarea concepţiei lui Aristotel despre ştiinţă amputează teoria lui şi o privează de ceea ce este central în concepţia sa. Aceasta este prima noastră obiecţie, dar nu ne vom opri la ea (sperînd să o reluăm într-un alt studiu), fiindcă vom formula o a doua obiecţie, care se referă de data aceasta nu la o absenţă în redarea gîndirii lui Aristotel, ci la o confuzie inexplicabilă în interpretarea textelor. Iată ce reproşează Beth teoriei lui Aristotel în lucrarea citată [13]: „Teoria ştiinţei lui Aristotel cere o *metafizică* ca ştiinţă a principiilor". Cu alte cuvinte, tot după acelaşi autor, pentru a explica posibilitatea de a accepta principiile pentru ele însele, fără demonstraţie, Aristotel are nevoie de o metafizică care este în fond „o cercetare a fundamentelor" — *a research on foundations* [14] şi care este *filosofia primă*. Beth crede că teoria cunoaşterii la Aristotel este analogă doctrinelor mistice [15], şi autorul citat conchide: „Teoria ştiinţei la Aristotel a călăuzit cercetarea ştiinţifică pînă în timpurile foarte recente. Această acceptare generală a teoriei ştiinţei a lui Aristotel implica problematica metafizicii sale şi teoriei sale a cunoaşterii." [16]

Dar afirmaţia lui Beth nu corespunde textelor. Iată cum descrie Aristotel ştiinţa: „Orice cunoştinţă raţională, fie învăţată, fie dobîndită, derivă totdeauna din cunoştinţe anterioare. Observaţia arată că acest lucru este adevărat pentru toate ştiinţele: în adevăr, acesta este procedeul matematicilor şi, fără excepţie, al tuturor artelor." [17] Şi Stagiritul continuă: „... Cunoaşterea demonstrată trebuie să rezulte din premise *adevărate, prime, imediate, cunoscute mai bine* şi *anterior concluziei*" [18]. El precizează că obiectul propriu

[11] A. Frenkian, *Le Sens primordial de* καθόλου, în volumul său *La Méthode hippocratique dans le „Phèdre" de Platon* (Bucureşti, 1941).
[12] Vezi Frenkian, *op. cit.*
[13] E. W. Beth, *op. cit.*, p. 32.
[14] *Ibidem*, p. 33.
[15] *Ibidem*, p. 34.
[16] *Ibidem*, p. 36.
[17] Aristotel, *Analiticele secunde*, I, 1, 71 a.
[18] *Ibidem*, I, 2, 71 b.

al științei „este un lucru care nu poate fi altfel decît este", adică ceea ce există prin necesitate — ἐξ ἀναγκαῖον. Dar pentru a nu mai fi nici o îndoială asupra intenției sale, care era în afară de orice concepție metafizică (în descrierea științei), Aristotel adaugă în același pasaj citat mai sus: „Dacă mai există un alt mod de cunoaștere, acest lucru va fi discutat mai tîrziu".

Rezultă din aceste texte că Stagiritul nu face nici o aplicare a metafizicii sale în descrierea teoriei științei. El fixează condițiile *sine quibus non* ale oricărei teorii ca atare. Putem spune, prin urmare, în conformitate cu textele lui asupra naturii cunoașterii științifice [19]: obiectul științei este necesarul și necesarul este obținut prin demonstrație; principiile de unde începe știința trebuie să fie mai bine cunoscute anterior și în chip imediat (cunoașterea prin demonstrații fiind o cunoaștere mediată).

Așadar, o teorie științifică are, la Aristotel, structura următoare:

1) Principiile științei, cunoscute altfel decît prin demonstrație, deci cunoscute printr-o cunoaștere imediată [20].

2) Teoremele științei cunoscute prin demonstrație, deci printr-o cunoaștere mediată.

3) Metoda de demonstrație, care este, prin excelență, silogismul.

El va demonstra — și vom prezenta mai departe argumentarea lui — că orice teorie trebuie să aibă această structură, altfel nu poate fi teorie; în afară de asta va arăta încă și cum este posibilă cunoașterea principiilor (deci altfel decît prin demonstrație).

Prin urmare, trebuie să distingem două lucruri în concepția lui Aristotel despre știință: descrierea științei, care este în afară de orice concepție metafizică; concepția lui despre cunoașterea principiilor, care este bazată pe metafizica lui. A confunda aceste două aspecte ale teoriei științei la Aristotel este a confunda ceea ce el însuși a despărțit cu grijă, după cum am arătat.

III. SISTEMELE FORMALE ALE ȘTIINȚEI

Pentru a se elibera de metafizica lui Aristotel, oamenii de știință, și în special logicienii matematicieni actuali, au crezut că trebuie să fie înlăturată orice fel de intuiție, care nu ar avea alt efect decît să vicieze obiectivitatea unei teorii.

O teorie ar trebui astfel construită cu abandonarea oricărei intuiții (fie intelectuale, fie sensibile), prin urmare a oricărui conținut, și acest lucru este posibil numai dacă se întrebuințează exclusiv semne, înlănțuite după anumite reguli precise și date de la început. Semnul, lipsit de orice conținut, este elementul fundamental al sistemului. Hilbert va spune în acest sens:

[19] *Ibidem.*

[20] Nu intrăm în amănuntele acestor „principii", care pot să fie divizate, după Aristotel, astfel:
1) termeni sau definiții;
2) presupuneri de existență;
3) propoziții imediate;
4) ipoteze sau postulate.

„Also am Anfang, so heisst es hier, war das Zeichen" — „Aşadar la început, s-ar zice, era semnul"[21].

Metoda axiomatică, ale cărei rezultate nu pot fi subestimate de nimeni, conjugată cu formalismul, a condus la construcţia sistemelor formale care înlocuiesc teoria ştiinţei după concepţia aristotelică. O teorie ştiinţifică este acum un sistem formal şi ea va fi cu atît mai „ştiinţifică" şi mai „obiectivă" cu cît va fi mai formalizată.

Ce este însă un sistem formal? Iată cum îl defineşte J. Cavaillès (sau, mai bine zis, îl descrie)[22]: „Un sistem formal în general este o grupare ierarhică de asamblări de semne sau *formule complete*, aşa că, pornind de la unele din ele (în număr finit sau infinit) considerate ca valabile, să se poată obţine altele, în baza unor procedee fixate o dată pentru totdeauna. Definiţia sa (a sistemului formal) comportă deci: 1° determinarea în acelaşi timp şi a materialului simbolic (semne fundamentale şi, dacă e cazul, mijloacele de a fabrica altele din nou, repartizate în diverse categorii) şi a condiţiilor pe care trebuie să le satisfacă asamblajele semnelor care vor fi studiate singure; 2° *formule dotate cu sens*, cu distincţia între formule complete (care se satisfac singure, adică capabile singure de validitate sau nevaliditate) şi *formule parţiale*, izolabile numai prin posibilitatea lor de înlocuire mutuală în interiorul primelor *(reguli de structură)*; 3° enunţul condiţiilor de validitate, adică enumerarea (sau delimitarea) formulelor complete admise ca valabile la început şi a regulilor care permit de a se obţine altele *(reguli de deducţie)*."

Iată acum o altă descriere a sistemelor formale dată de A. Fraenkel şi J. Bar-Hillel. Un sistem formal este determinat de următoarele cinci mulţimi[23]:

(1) Mulţimea *simbolurilor primitive*, care constituie *vocabularul primitiv*, împărţit în *variabile, constante şi, simboluri auxiliare.*

(2) Mulţimea *termenilor*, ca submulţime a mulţimii expresiilor, determinate prin reguli efective.

(3) Mulţimea *formulelor*, ca submulţime a mulţimii expresiilor, determinate prin reguli efective cu ajutorul noţiunii de *termen.*

(4) Mulţimea axiomelor ca submulţime a mulţimii de formule.

(5) Mulţimea finită a *regulilor de inferenţă* în virtutea cărora o formulă este derivabilă imediat dintr-o mulţime finită convenabilă de formule, considerate ca premise.

Noţiunea de *sistem formal* corespunde unei perfecţionări a metodei axiomatice, ne spune J. Ladrière.[24] În evoluţia metodei axiomatice, J. Ladrière distinge patru etape:

1° Axiomatica intuitivă;
2° Axiomatica abstractă;
3° Axiomatica formală;
4° Sistemul formal pur.

[21] David Hilbert, *Neubegründung der Mathematik* („Abhandlungen math." Seminar, Hamburg, I, 1922).

[22] J. Cavaillès, *Axiomatique et système formel* (Paris, Hermann, 1938), p. 101.

[23] A. Fraenkel şi J. Bar-Hillel, *Foundations of Set Theory*, p. 271 (Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1958).

[24] J. Ladrière, *Les Limitations internes des formalismes*, p. 35 (Paris et Louvain, Gauthier-Villars, 1957).

Progresul axiomaticii constă tocmai, afirmă Ladrière, în eliminarea crescîndă a intuiţiei.[25] „Orice referinţă la un domeniu de sens exterior sistemului este eliminată — ne explică în continuare autorul citat — prin utilizarea unui limbaj simbolic riguros definit."

Nu vom intra în detaliile construcţiei sistemelor formale. Vom adăuga numai că grupul de axiome trebuie să satisfacă unele condiţii, care, într-un mod general, pot fi rezumate astfel: axiomele trebuie să fie *necontradictorii, suficiente* şi *complete.*

Orice sistem formal se construieşte în modul acesta, şi această construcţie este *prezentarea* lui.

Pe de altă parte, un sistem formal fiind dat, se poate atribui un sens determinat componentelor primitive, punîndu-le în corespondenţă cu anumite obiecte bine definite. Această corespondenţă se numeşte *reprezentarea* sistemului formal şi prin aceasta se realizează o „concretizare" a sistemului.[26]

Se poate realiza o altă specie de corespondenţă: punerea în corespondenţă a propoziţiilor elementare cu o anumită clasă de enunţuri al căror adevăr (sau falsitate) este determinat independent de sistem.[27] Această corespondenţă specială se numeşte *interpretarea* sistemului.

Iată, pe scurt, ceea ce a înlocuit o teorie ştiinţifică: un asamblaj de semne, condiţia esenţială, *sine qua non,* fiind ca el să fie necontradictoriu.

IV. RELATIVITATEA TERMENILOR PRIMITIVI, A AXIOMELOR ŞI A TEOREMELOR ÎN SISTEMELE FORMALE

Acelaşi sistem formal poate fi construit în mai multe moduri, plecind de la un grup oarecare de semne primitive şi de axiome. Vom examina mai de aproape această idee în ceea ce urmează şi care a provocat consecinţe incalculabile.

Ideea că termenii primitivi şi axiomele pot fi alese în mod liber (cu condiţia principală a necontradicţiei lor) s-a impus chiar de la începutul cercetărilor axiomatice formaliste. În adevăr, dacă „formalizarea" inseamnă utilizarea unor simboluri lipsite de orice conţinut, atunci este evident că nu există sens intrinsec al acestor simboluri care să le poată impune pe unele înaintea altora. Totul revine astfel la un joc de simboluri.

Acest lucru a fost sesizat chiar de la primele tentative de formalizare şi axiomatizare ale ştiinţei. Iată ce remarcă Bertrand Russell cu privire la sistemul logico-formal prezentat de el şi Whitehead in *Principia Mathematica*[28]: „Nu avem nici un motiv să presupunem că este imposibil să se găsească idei şi axiome mai simple cu care s-ar putea defini şi demonstra acelea cu care noi începem. *Tot ceea ce afirmăm este că ideile şi axiomele cu care începem sînt suficiente şi nu că ele sînt necesare.*" Russell nu a sesizat însă gravitatea

[25] *Ibidem,* p. 36.
[26] *Ibidem,* p. 42.
[27] *Ibidem,* p. 43.
[28] A. N. Whitehead şi B. Russell, *Principia Mathematica,* vol. I, p. VI (Londra, 1910).

consecințelor care decurg din admiterea unor idei și axiome *care nu sînt necesare* în construcția unui sistem care vrea să explice *necesitatea* concluziilor în matematici și, în general, în orice știință!

Louis Couturat, care era la fel de entuziasmat ca și Russell de noua metodă logico-matematică, precizează această concepție într-un chip și mai îndrăzneț: „Nu trebuie să se dea nici un sens absolut acestor epitete de indefinisabil și de indemonstrabil decît în raport cu un anumit sistem de definiții și cu o anumită ordine de demonstrații; într-un alt sistem sau într-o altă ordine, aceleași noțiuni ar putea fi definite și aceleași propoziții ar putea fi demonstrate. Nu trebuie, de asemenea, să se atribuie un sens absolut (epistemologic) expresiilor echivalente de «noțiune primitivă» și de «propoziție primitivă»." [29]

Logicienii formaliști și-au dat seama treptat că relativitatea noțiunilor primitive și a axiomelor este un fapt care rezultă direct și imediat din concepția formalistă însăși, ca atare. Ei au acceptat astfel situația de fapt și au concentrat-o într-un principiu: acela al relativității alegerii simbolurilor primitive și a axiomelor. Cum sistemele formale sînt destinate să înlocuiască teoria nu numai a oricărei științe, dar și a logicii — devenind astfel sisteme logico-formale —, concluziile de mai sus s-au extins asupra oricărei științe în general. Iată într-adevăr ce scrie Rudolf Carnap: „După concepția tradițională, era necesar ca axiomele să fie evidente. După concepția modernă, această condiție nu mai este cerută, propoziții arbitrare *(beliebige Sätze)* pot fi luate ca axiome." [30]

Prin urmare, noțiunile primitive, ca și axiomele, sînt alese în mod arbitrar. Ele nu se impun prin ele însele la începutul unui sistem formal, ci sînt alese în mod liber, deși, în ansamblul lor, ele trebuie să satisfacă unele condiții.

„Trecerea la axiomatica formală — scrie J. Ladrière — modifică profund sensul axiomaticii: prioritatea acordată unor enunțuri ca punct de plecare devine în adevăr complet relativă. Ea nu mai este bazată pe simplicitate sau pe un grad mai mare de evidență, ci numai pe comoditate. Alegerea enunțurilor inițiale devine în întregime arbitrară. În principiu, oricare sistem de enunțuri poate fi luat ca sistem de axiome; singurul lucru care interesează este să se poată deduce efectiv întreaga teorie. Cu alte cuvinte, sistemul axiomatic nu are drept scop să facă să apară ordinea naturală care există între enunțurile unei teorii, ci de a introduce o ordine care, în sine, poate fi oarecare. Se cere numai sistemului să răspundă unor condiții de simplicitate și de claritate și numai aceste criterii vor comanda alegerea axiomelor: ceea ce trebuie să se obțină este eliminarea oricărei ambiguități." [31]

Se vede astfel că ceea ce „comandă" alegerea simbolurilor primitive și a axiomelor este exclusiv un criteriu de ordin *practic*, și nu teoretic (în condițiile date, nici nu puteau fi de altă natură). Poziția axiomatică formalistă poate fi rezumată, în ultimă analiză, astfel: *se poate să ne oprim oriunde.* Se poate începe construcția unui sistem de unde vrem noi.

Problema întreagă gravitează deci în jurul alegerii inițiale a simbolurilor și așa-ziselor axiome. Și această alegere este arbitrară.

[29] L. Couturat, *Les Principes des mathématiques*, p. 37 (Paris, Alcan, 1905).
[30] R. Carnap, *Einführung in die symbolische Logik*, p. 172 (Viena, 1960).
[31] J. Ladrière, *op. cit.*, p. 37.

„În general — scrie Tarski — nu consideraţii de ordin teoretic fundamental decid asupra alegerii unui sistem determinant de termeni primitivi şi de axiome printre toate sistemele echivalente: motivele sînt mai curînd de ordin practic, didactic şi chiar estetic." [32]

Dar o astfel de concepţie privează de orice justificare de *„ordin teoretic"* alegerea punctului de plecare şi, după cum vom vedea, această lipsă totală de fundament logic de la început a unui sistem afectează întreg sistemul.

V. PREZENTAREA SUMARĂ A CÎTORVA SISTEME

Pentru a ne face o idee clară despre relativitatea de principiu a noţiunilor primitive şi a axiomelor oricărui sistem formal, vom examina, într-un mod cu totul general, axiomatizarea sistemelor calculului propoziţional (şi prin aceasta implicit a sistemelor respective de logică matematică) şi a sistemelor teoriei mulţimilor.

A. Sistemele axiomatice ale logicii clasice

Numărul axiomatizărilor posibile ale sistemelor formale ale logicii clasice este aproape nelimitat. Alonzo Church dă numele de „formulări ale calculului propoziţional" acestor axiomatizări, toate aceste „formulări" fiind echivalente.[33]

Vom da numai unele din aceste axiomatizări ale calculului propoziţional bivalent, grupate după noţiunile lor primitive.[34] Ca reguli de derivare, aceste sisteme acceptă *substituţia* şi *modus ponens* (în afară de indicaţie contrară).

I. *Sisteme care utilizează următoarele cinci noţiuni primitive: implicaţia, negaţia, conjuncţia, disjuncţia şi echivalenţa.*

1. Sistemul lui Hilbert-Bernays (1934) cu 15 axiome.
2. Sistemul lui Hermes-Scholz (1952) cu 15 axiome.
3. Sistemul lui Moh Shaw-Kwei (1957) cu 10 axiome.
4. Sistemul lui Moh Shaw-Kwei (1957) cu 5 axiome.

II. *Sisteme care utilizează următoarele patru noţiuni primitive: implicaţia, negaţia, conjuncţia şi disjuncţia.*

1. Sistemul lui Heyting (1930) cu 12 axiome.
2. Sistemul lui S. Kangert (1955) cu 12 axiome.
3. Sistemul lui A. Tarski (1952) cu 10 axiome.

III. *Sisteme care utilizează trei noţiuni primitive: implicaţia, negaţia şi conjuncţia.*

1. Sistemul lui Porte (1958) cu 5 axiome.

[32] Alfred Tarski, *Sur la méthode déductive*, p. 100 (*Travaux du IX^e Congrès International de Philosophie*, vol. VI, Paris, Hermann, 1937).

[33] A. Church, *Introduction to Mathematical Logic*, p. 136—139 (Princeton-New Jersey, 1956).

[34] A se vedea cu privire la această problemă, în afară de lucrarea lui Church citată, şi tratatele: A. Prior, *Formal Logic*, ed. a II-a, p. 30—37 (Oxford, 1962); J. Dopp, *Notions de Logique Formelle*, p. 260—275 (Paris, Louvain, 1965).

2. Sistemul lui Porte (1958) cu 4 axiome.
3. Sistemul lui Rosser (1953) cu 3 axiome.

IV. *Sisteme care utilizează următoarele trei noţiuni primitive: implicaţia, negaţia şi disjuncţia.*

1. Sistemul lui Jaśkowski (1948) cu 7 axiome.

V. *Sisteme care utilizează următoarele două noţiuni primitive: implicaţia şi negaţia.*

1. Sistemul lui Russell (1906) cu 7 axiome.
2. Sistemul lui Frege (1879) cu 6 axiome.
3. Sistemul lui Hilbert (1922) cu 6 axiome.
4. Sistemul lui Moh Shaw-Kwei (1957) cu 6 axiome.
5. Sistemul lui Tarski (1958) cu 4 axiome.
6. Sistemul lui Porte (1958) cu 4 axiome.
7. Sistemul lui Łukasiewicz (1929) cu 3 axiome.
8. Sistemul lui Sobociński (1953) cu 3 axiome.
9. Sistemul cu o axiomă unică a lui Łukasiewicz şi Meredith (1953).

VI. *Sisteme care utilizează două noţiuni primitive: implicaţia şi disjuncţia (dar definesc implicaţia cu negaţia şi disjuncţia).*

1. Sistemul lui Jaśkowski (1948) cu 6 axiome.
2. Sistemul lui Whitehead şi Russell (1910) cu 5 axiome.
3. Sistemul lui Hilbert-Ackermann (1928) cu 4 axiome.
4. Sistemul lui Rasiowa (1948) cu 3 axiome.
5. Sistemul lui Meredith (1951) cu 3 axiome.
6. Sistemul lui Meredith (1953) cu o singură axiomă.

VII. *Sisteme care utilizează două noţiuni primitive: negaţia şi disjuncţia.*

1. Sistemul lui Reichenbach (1953) cu 5 axiome.
2. Sistemul lui Rose (1949) cu 3 axiome.

VIII. *Sisteme care utilizează două noţiuni primitive: negaţia şi conjuncţia.*

1. Sistemul lui Sobociński (1938) cu 4 axiome.
2. Sistemul lui Sobociński (1962) cu 4 axiome.

IX. *Sisteme care utilizează o singură noţiune primitivă: incompatibilitatea (functorul lui Scheffer).*

1. Sistemul lui Nicod (1918) cu o singură axiomă.
2. Sistemul lui Łukasiewicz (1925) cu o singură axiomă.
3. Sistemul lui Wajsberg (1931) cu o singură axiomă.

Ca regulă de deducţie aceste sisteme utilizează regula *modus ponens* sub o formă specială.

B. Sistemele axiomatice ale teoriei mulţimilor

1. *Sistemul lui Whitehead şi Russell*, formulat în *Principia Mathematica* (1910), dar propus de Russell în 1908 şi care cuprinde:

a) sistemul formal al logicii clasice, aşa cum este formulat în *Principia*, cu teoria tipurilor, axioma de reductibilitate şi încă următoarele axiome:

b) axioma de extensionalitate,

c) axioma de separație (sau comprehensiune),

d) axioma infinitului [35].

2. *Sistemul lui Zermelo*, publicat in 1908 de autor. Sistemul formal al lui cuprinde [36]:

idei primitive

a) ideea de mulțime notată cu una din variabilele $x, y, z, \cdots$;

b) ideea de apartenență reprezentată de simbolul „$\in$" (care exprimă raportul de la membru la mulțime);

c) logica elementară este presupusă (axiome, reguli de deducție etc.);

axiome

d) sistemul acceptă 8 axiome.

A. Fraenkel a completat sistemul lui Zermelo cu o axiomă suplimentară, numită axioma de substituție.[37]

3. *Sistemul lui von Neumann-Bernays*:

a) Sistemul face o distincție intre „clasă" și „mulțime" [38]. El conține deci variabilele lui Zermelo, $x, y, z, \cdots$ (mulțimi), semnul „$\in$" de apartenență și variabilele de „clasă", $X, Y, Z, \cdots$

b) Sistemul conține cele 9 axiome ale lui Zermelo, dar modifică 3 dintre ele, înlocuiește pe prima printr-o alta și adaugă încă o a zecea axiomă, care conține 8 cazuri speciale.[39]

4. *Sistemul lui Quine*:

a) Sistemul înlocuiește teoria tipurilor (a lui Russell) cu așa-zisa „teorie a stratificării";

b) admite 3 axiome (în faza finală).[40]

Există multe alte axiomatizări ale teoriei mulțimilor, de exemplu aceea a lui A. Schoenflies [41], aceea a lui P. Finsler [42], F. Gonseth [43], N. Bourbaki [44], Hao Wang[45] etc.

[35] Pentru dezvoltarea sistemului, a se vedea, in afară de *Principia Mathematica* excelenta expunere a lui Hao Wang și Robert Mc. Naughton, *Les Systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles* (Paris, Louvain, 1953).

[36] Ernst Zermelo, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre* („Math. Annalen", 1908).

[37] A. Fraenkel, *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre* („Math. Annalen", 1922).

[38] J. von Neumann, *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre* („Journal für reine und angewandte Mathematik", vol. 154, 1925).

[39] Hao Wang și Mc Naughton, *op. cit.*, p. 19–21.

[40] W. V. Quine, *Mathematical Logic* (Cambridge, Massachusetts, ed. I, 1940; ed. a II-a, 1951).

[41] A. Schoenflies, *Zur Axiomatik der Mengenlehre* („Math. Annalen", 1921).

[42] P. Finsler, *Über die Grundlagen der Mengenlehre*, I. Teil, *Die Mengen und ihre Axiomen* („Math. Zeitschrift", 1926).

[43] F. Gonseth, *Sur l'axiomatique de la théorie des ensembles et sur la logique des relations* („Commentarii Math. Helv.", 1933).

[44] N. Bourbaki, *Théorie des ensembles* (Paris, Hermann, 1954).

[45] Hao Wang, *The Formalisation of Mathematics* („Journal of Symbolic Logic", 1954, p. 241–266).

VI. OBIECŢIE FUNDAMENTALĂ

O obiecţie a cărei importanţă decisivă nu va scăpa nimănui se opune imediat acestei construcţii esenţial relative a oricărui sistem formal.

Vom formula această obiecţie în două părţi. Deoarece orice mulţime de simboluri bine alese poate fi luată ca mulţime de noţiuni primitive şi orice mulţime de formule-teoreme bine alese poate fi luată ca grup axiomatic, celelalte noţiuni şi formule putînd fi derivate din primele, rezultă:

A. *Noţiunile sistemului formal întreg sînt reciproc definisabile, adică ele sînt definisabile unele prin altele, deci prin definiţii idem per idem, şi, prin urmare, ele nu sînt deloc definite.*

B. *Formulele valabile ale sistemului (axiome şi teoreme) putînd fi reciproc demonstrate unele cu ajutorul altora, rezultă că demonstraţia lor este circulară şi, prin urmare, ele nu au nici o demonstraţie.*

Pe scurt, construcţia axiomatică a unui sistem formal este vicioasă fiindcă „logicitatea" sa interioară este circulară.

Această obiecţie de principiu a fost discutată chiar de Aristotel în *Analiticele secunde.*

În teoria ştiinţei, lui Aristotel i s-au impus necesarmente două moduri de a cunoaşte, după cum am mai menţionat: cunoaşterea imediată a principiilor şi cunoaşterea mediată prin demonstraţie. Ideea de ştiinţă şi de structură a ştiinţei implică, spune Aristotel, într-un mod necesar ca ştiinţa demonstrativă să plece de la principii imediate, mai bine cunoscute decît concluzia a căror cauză ele sînt şi care o preced [46].

Vom vedea mai departe cum explică Aristotel posibilitatea logică a acestei „cunoaşteri imediate". Pentru un moment, vom sublinia numai că separaţia de *natură*, pe care el o face între principiile de unde începe o ştiinţă şi teoremele demonstrate cu ajutorul lor în interiorul acestei ştiinţe, este esenţială. Dacă nu se admite un alt mod diferit de cunoaştere pentru principii decît acela al cunoaşterii concluziilor (prin demonstraţie), ştiinţa întreagă este lipsită de „logicitate" internă.

Această obiecţie pe care am formulat-o mai sus împotriva construcţiei relative a oricărui sistem formal, unde nici „principiile" şi nici „teoremele" nu au nici un fundament logic, trebuie să fi făcut obiectul unor lungi dezbateri în epoca lui Aristotel, pentru că el însuşi este obligat să-i dea atenţie şi să o respingă prin concepţia lui.

Într-adevăr, în acelaşi tratat [47], Aristotel se ocupă de această obiecţie adusă ştiinţei demonstrative.

1. Unii pretind — spune el — că nu există principii şi că, prin urmare, demonstraţia este imposibilă, deoarece ar trebui atunci să coborîm din propoziţie în propoziţie la infinit (ceea ce mai tîrziu avea să se numească *regressus in infinitum*).

2. Dacă, pe de altă parte, seria se termină şi există principii (sau premise prime), acestea nu pot fi cunoscute, fiindcă nu există pentru ele o demonstraţie, ceea ce — pentru cei care opuneau această obiecţie — era singura formă de cunoaştere.

[46] Aristotel, *op. cit.*, I, 2, 71 b.
[47] Aristotel, *op. cit.*, I, 3, 72 b.

În rezumat: deoarece nu putem să cunoaștem premisele prime (sau principiile), cunoașterea concluziilor, care derivă din acestea, nu este o adevărată cunoaștere și poate chiar să nu fie deloc o cunoaștere, ci numai ceva bazat pe o simplă presupunere, că premisele ar fi adevărate.

Acest argument contra cunoașterii derivate din principii a fost speculat de sceptici, care au susținut, bazîndu-se pe el, că „începutul" este dogmatic. A doua opinie, după care orice cunoștință trebuie să fie rezultatul unei demonstrații, este de fapt un al doilea argument speculat de sceptici. În această concepție nu se mai pune problema principiilor, ci se arată că demonstrația este circulară. Această obiecție nu nega că toate adevărurile pot fi demonstrate, ci numai că ele sînt demonstrate unele prin altele și că deci demonstrațiile sînt circulare și reciproce.

Care este răspunsul dat de Maestrul din Stagira? Iată acest răspuns, așa cum apare el în *Analiticele secunde* [48]: „Teoria noastră este că nu e adevărat că orice cunoștință este o demonstrație; din contra, cunoașterea premiselor imediate este independentă de orice demonstrație. Este evident că trebuie să fie așa, fiindcă, dacă trebuie să cunoaștem premisele prime, de unde derivăm demonstrațiile, și dacă regresul trebuie să se termine în adevăruri imediate, aceste adevăruri trebuie să fie indemonstrabile. Aceasta este teoria noastră, și adăugăm că în afară de cunoașterea științifică există un principiu care ne dă posibilitatea de a cunoaște definițiile."

Lăsînd la o parte, pentru un moment, concepția prin care Aristotel arată că noi avem posibilitatea efectivă de a avea o cunoaștere imediată (a principiilor), vom reține din examenul făcut de el concluziile următoare:

1. Trebuie să existe principii, trebuie necesarmente să ne oprim — ἀνάγκη στῆναι —, altfel cădem într-un *regressus ad infinitum.*

2. Aceste principii sînt și trebuie să fie cunoscute altfel decît concluziile fiindcă, dacă nu acceptăm lucrul acesta, atunci nu mai există decît posibilitatea de a accepta una din alternativele:

a) atitudinea dogmatică;

b) atitudinea relativistă și convenționalistă, amîndouă neavînd nici o justificare logică.

3. Contra demonstrației circulare, Aristotel spune că ea nu mai este posibilă, dacă ne oprim la principii mai bine cunoscute și anterioare concluziei, deci că demonstrația nu poate pleca, în acest caz, de la concluzii pentru a demonstra principiile.

Dacă nu acceptăm aceste concluzii (indiferent de explicația pe care o putem admite), că principiile sînt (și trebuie să fie) mai simple, mai bine cunoscute și anterioare concluziei, teoria științifică respectivă își pierde logicitatea ei, adică orice justificare exterioară, nimic nemaifiind justificat propriu-zis.[49]

[48] *Idem*, I, 3, 72 b.

[49] Lipsa de justificare a unei științe care nu face nici o distincție de natură noetică între principii și concluzii a fost subliniată și de Platon, care a acceptat aceeași structură a științei, ca și Aristotel, fiindcă după el Geometria și științele care o însoțesc ... vizează să atingă Ființa și va fi imposibil să o vadă cu ochii deschiși atît timp cît [geometrii] se vor servi de postulate și le vor susține fără a putea să le arate rațiunea. *În adevăr, cum s-ar putea numi știință o disciplină care ignorează principiul ei și ale cărei concluzii și propoziții intermediare se sprijină pe ceea ce ea ignorează.* (Platon, *Republica*, 533 c.) Această concepție a fost adoptată, de asemenea, de logicienii Evului Mediu. Iată, de exemplu, pentru

Ceea ce este remarcabil este că nulitatea intregului sistem (și a tot ce se petrece într-un astfel de sistem) a fost demonstrată complet de Aristotel. Într-adevăr, Aristotel a arătat că acei care nu admit construcția unei teorii în sensul explicat mai sus (după concepția lui) admit demonstrația circulară și reduc întreaga teorie „la simpla constatare că un lucru există fiindcă există, un mod frecvent de a arăta nu importă ce"[50].

Demonstrația circulară, admițînd că premisa poate deveni concluzie și, invers, că concluzia poate deveni premisă, nu justifică nici premisa, nici concluzia și nu spune nimic altceva în fond, decît că dacă ceva este, atunci acest ceva este.

Cu alte cuvinte, trebuie cu necesitate să ne oprim la cunoștințe obținute în alt mod decît cunoștințele demonstrate într-o teorie, fiindcă altfel ne oprim necesarmente, este adevărat, pentru ca sistemul să poată fi formulat, dar într-un mod artificial și convențional, ceea ce anulează logicitatea sistemului întreg.

Sistemele formale ale științei în general și ale logicii în particular arată că nu s-a respectat argumentul marelui Stagirit, de unde cele două poziții contemporane: dogmatismul și relativismul (ajuns în faza sa ultimă la convenționalism).

VII. DEMONSTRAȚIA FORMALĂ

Un singur logician contemporan a sesizat situația în care a fost împinsă logica, transformată în sistem formal. Este vorba de Ludwig Wittgenstein, cel puțin în faza *Tractatus*-ului *logico-philosophicus*. Fără a se referi la condițiile *sine quibus non* ale unei teorii științifice așa cum au fost stabilite de Aristotel, Wittgenstein remarcă, într-un chip surprinzător, unele puncte importante, care confirmă analiza noastră. Cu toate că aforismele sale nu sesizează decît unele aspecte particulare, Wittgenstein se găsește, prin aceste observații, foarte aproape de Aristotel. Într-adevăr, iată ce scrie el cu privire la „deducerea" tautologiilor logice din alte tautologii: „Demonstrația propozițiilor logice constă din aceea că putem să le creăm plecînd de la alte propoziții logice prin aplicarea succesivă a unor operații, care dau naștere din nou unor tautologii din primele (și din tautologii nu rezultă decît tautologii)" [51].

Wittgenstein nu putea însă să nu observe că o asemenea derivare este complet artificială, fiindcă el adaugă: „Natural, acest mod de a arăta că pro-

a cita o singură lucrare pe care o avem la indemînă acum, ceea ce scrie Julius Pacius, în notele sale marginale la *Organon*, cu privire la teza acelora care susțineau că nu există principii (în sensul lui Aristotel): „În acest caz, dacă principiile sînt necunoscute *(ignota) — necesse est etiam cetera, quae ex principiis demonstrantur, esse ignota. Quare scientia nulla est*". („Este necesar de asemenea ca celelalte [propoziții] care sînt demonstrate din principii să fie necunoscute. Deci nu există știință.") A se vedea Julius Pacius, *Aristotelis peripateticorum principis Organum*, ed. a II-a, 1597, p. 419. Text grecesc și latin, cu note marginale. Reimpresiune reprografică, Frankfurt am Main, 1967.

[50] Aristotel, *op. cit.*, I, 3, 73 a. Aristotel arată în acest loc, cu toate dezvoltările necesare, că în asemenea „teorii" circulare (acceptate astăzi de matematicieni) totul revine la a spune: „Dacă *A* este, atunci *A* trebuie să fie".

[51] L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus* (prop. 6.126) (Londra, Ed. Paul Kegan, 1933).

pozițiile sînt tautologii este absolut neesențial pentru logică tocmai pentru că *propozițiile de unde începe demonstrația trebuie să arate, fără demonstrație, că ele sînt tautologii*".

Autorul *Tractatus*-ului remarcă deci că axiomele trebuie să fie acceptate în virtutea altor motive decît acelea pentru care sînt acceptate teoremele. În adevăr, dacă principiile sînt tautologii și teoremele sînt de asemenea tautologii, atunci premisele prime (sau principiile logice) nu sînt „mai simple, mai bine cunoscute și anterioare concluziilor", cum a arătat Aristotel. „Dignitatea" egală, pe care o au, atît premisele, cît și teoremele în sistemul formal al logicii, nu a scăpat observației lui Wittgenstein. Și iată acum cum precizează el această situație bizară a logicii: „În logică procesul și rezultatul sînt echivalente" [52].

În aceste condiții, demonstrația, într-un sistem formal al logicii, nu mai are caracterul pe care-l avea la Aristotel. „Demonstrația în logică — scrie Wittgenstein — este numai un mijloc mecanic auxiliar pentru a recunoaște mai ușor tautologia acolo unde ea este complicată" [53]. Pentru a explica lucrul acesta, Wittgenstein este obligat să facă o distincție între demonstrația unei „propoziții semnificative" și a unei „propoziții de logică". „Este clar — scrie el — că demonstrația unei propoziții semnificative și demonstrația în logică trebuie să fie două lucruri diferite." [54] Această diferență consistă, după el, în faptul următor: „Propoziția semnificativă exprimă ceva și demonstrația ei arată că așa este; în logică orice propoziție este forma unei demonstrații" [55].

Așadar, deoarece demonstrația nu poate aduce nimic nou *(keine Überraschung)*, rezultă că *„logica poate fi astfel concepută, încît fiecare propoziție este propria ei dovadă. Fiecare tautologie arată prin ea însăși că este o tautologie"*. (Wittgenstein a ajuns la aceeași concluzie cu Aristotel: nimic nu se justifică — în cazul considerat — decît prin sine insuși.)

Consecința acestor considerații este absolut necesară, și autorul modern o enunță după cum urmează: „Este clar că numărul «axiomelor logice» este arbitrar, fiindcă logica întreagă s-ar putea deriva numai dintr-o singură axiomă, formînd, pur și simplu, de exemplu, produsul logic al axiomelor lui Frege (Frege ar fi spus, poate, că această axiomă nu ar mai fi nemijlocit evidentă. Dar este de mirare că un gînditor atît de exact ca Frege a apelat la gradul de evidență ca fiind criteriul propoziției logice)" [56].

Aceste observații nu puteau să-i permită unui logician de talia lui Wittgenstein să mai numească sistemul formal al logicii o „teorie" și el este obligat să conchidă: „Logica nu este o teorie, ci o reflectare a lumii" *(„Die Logik ist keine Lehre sondern ein Spiegelbild der Welt")* [57].

Deși exprimate într-un mod aforistic, observațiile lui Wittgenstein confirmă în întregime analiza noastră. (Numai că el nu le-a extins în întregime la orice sistem formal, care nu este o teorie, prin natura construcției lui.) În condițiile în care este construit un sistem formal, el nu mai constituie o

[52] L. Wittgenstein *op. cit.* (prop. 6.1261).
[53] *Idem* (prop. 6.1262).
[54] *Ibidem* (prop. 6.1263).
[55] *Ibidem* (prop. 6.1264).
[56] *Ibidem* (prop. 6.1271).
[57] *Ibidem* (prop. 6.13).

teorie propriu-zisă, şi aşa-numitele „adevăruri" logice — din sistemul formal al logicii —, anume tautologiile, nu sînt decît forme de deducţie.

Am ţinut să subliniem, prin ceea ce precedă, faptul că unul dintre cei mai proeminenţi logicieni contemporani contestă că logica este o „teorie" — şi el contestă acest caracter „teoretic" tocmai logicii lui Frege şi a lui Russell (şi prin aceasta oricărui „sistem" al logicii), bazîndu-se pe argumentul că acest „sistem" începe de la cîteva propoziţii „care trebuie să arate fără demonstraţie că ele sînt tautologii". Adică tocmai fiindcă nu există nici o diferenţă de „dignitate" între axiome şi teoreme. Cu alte cuvinte, sistemul formal al logicii nu este o „teorie" tocmai fiindcă nu îndeplineşte condiţiile *sine quibus non* ale oricărei teorii enunţate de Aristotel.

VIII. ANALIZA UNUI SISTEM FORMAL

Vom analiza acum un sistem formal în lumina concluziilor generale demonstrate mai sus.

Vom alege sistemul formal al logicii propoziţionale bivalente, anume sistemul lui Russell şi Whitehead din *Principia Mathematica*.

1. Idei primitive

a) Variabile propoziţionale, notate $p, q, r, \cdots$, susceptibile să ia două valori, *Adevărul* (A) şi *Falsul* (F).

b) *Negaţia*, reprezentată de semnul „$\sim$"; $\sim p$ semnifică „non-p" şi valoarea variabilei p este schimbată din A în F şi din F în A prin intervenţia semnului „$\sim$".

c) *Disjuncţia*, simbolizată de semnul „V", care semnifică „sau"; $p \vee q$ semnifică atunci „p sau q", adică expresia $p \vee q$ ia valoarea A dacă una cel puţin din variabilele p şi q ia valoarea A şi ia valoarea F numai dacă ambele variabile p şi q au valoarea F.

2. Noţiuni definite

a) Semnul de definiţie este „=", însoţit de grupul literal Df, pentru a se preciza că este vorba de definiţie.

b) *Implicaţia* este simbolizată prin semnul „$\supset$", care este un semn definit: $p \supset q$ înseamnă sau prima variabilă ia valoarea F sau a doua este A. Altfel spus, semnul de implicaţie este un semn definit cu ajutorul semnelor „V" (disjuncţia) şi „$\sim$" (negaţia):

$$p \supset q = \sim p \vee q. \quad \text{Df}$$

Punctuaţia separă diversele părţi ale unei formule, puterea unui grup de puncte întinzîndu-se pînă unde se întîlneşte, în formulă, un număr egal sau mai mare de puncte. Se pot întrebuinţa, în acelaşi scop, paranteze de diverse tipuri ca şi în algebră.

c) *Conjuncţia* este simbolizată de un punct pus între două variabile propoziţionale, adică $p \cdot q$; expresia $p \cdot q$ are valoarea A dacă şi numai dacă p şi q sînt A şi are valoarea F dacă una cel puţin din variabilele p şi q este F. Prin definiţie

$$p \cdot q = \cdot \sim (\sim p \vee \sim q). \quad \text{Df}$$

Adică $p \cdot q$ semnifică „este fals că una din variabilele p sau q este falsă".

d) *Echivalența* este simbolizată de semnul „$\equiv$". Și acesta este un semn definit: p și q au simultan valoarea A sau F.

$$p \equiv q = p \cdot q \vee \sim p \cdot \sim q. \qquad \text{Df}$$

3. Grupul axiomatic de formule

Construind cu semnele primitive sau definite expresii mai mult sau mai puțin complicate, se pot obține formule care păstrează totdeauna valoarea A independent de valorile luate de variabilele cu care ele sînt construite. Aceste formule se numesc *tautologii* (după Wittgenstein).

Russell a ales la început cinci tautologii ca axiome, cinci *formule adevărate*. Iată aceste cinci axiome (semnul $\vdash$ este semnul de aserțiune al lui Frege):

A1 $\vdash : p \vee p \cdot \supset \cdot p$

A2 $\vdash : q \cdot \supset \cdot p \vee q$

A3 $\vdash : p \vee q \cdot \supset \cdot q \vee p$

A4 $\vdash : p \vee (q \vee r) \cdot \supset \cdot q \vee (p \vee r)$

A5 $\vdash : q \supset r \cdot \supset : p \vee q \cdot \supset \cdot p \vee r$

Să luăm una din aceste axiome și să arătăm că este o tautologie, prin tabela sa de valori (matrice), de exemplu, să construim matricea axiomei $A2$, combinînd în toate modurile posibile valorile variabilelor componente p și q:

p	q	$p \vee q$	$q \cdot \supset \cdot p \vee q$
A	A	A	A
F	A	A	A
A	F	A	A
F	F	F	A

După cum se vede, formula $A2$ păstrează tot timpul valoarea A.

La fel se poate arăta că și celelalte axiome sînt tautologii.

S-a arătat mai tîrziu că aceste axiome nu sînt toate independente. Primul care a arătat că grupul de axiome ale sistemului lui Russell poate fi redus a fost Jean Nicod [58].

O altă reducere a numărului de axiome al acestui sistem a fost făcută de Paul Bernays [59], care le-a redus la patru, eliminînd pe $A4$ (care se deduce din celelalte).

4. Reguli de inferență

a) *Regula substituției*. În orice formulă adevărată (tautologie) se poate substitui unei aceleiași variabile propoziționale o expresie propozițională (formată deci cu variabilele propoziționale și cu semnele de disjuncție, negație, conjuncție, implicație, echivalență etc.) și rezultatul este tot o formulă ade-

[58] Jean Nicod, *A Reduction in the Number of the Primitive Propositions* („Proceedings of the Cambridge Philosophical Society", vol. 19, 1917–1920).

[59] P. Bernays, *Axiomatische Untersuchungen des Aussagenkalküls der „Principia Mathematica"* (in „Mathematische Zeitschrift", 1926, p. 305–320).

vărată (tautologie), cu condiția ca variabila să fie înlocuită *pretutindeni* în formulă prin aceeași expresie propozițională.

b) *Regula modus ponens.* Dacă o implicație este adevărată și primul ei membru este adevărat, atunci membrul al doilea al implicației este de asemenea adevărat. Ceea ce se scrie

$$\begin{array}{l} \vdash \cdot p \supset q \\ \vdash \cdot p \\ \hline \vdash \cdot q \end{array}$$

5. Teoremele sistemului

În virtutea regulilor de derivare a formulelor adevărate (tautologii), Russell deduce o mulțime de teoreme (tautologii), dintre care vom cita cîteva:

T1	$\vdash \cdot \sim p \vee p$	(principiul terțiului exclus)
T2	$\vdash \cdot \sim(p \cdot \sim p)$	(principiul contradicției)
T3	$\vdash \cdot \sim(\sim p)$	(principiul dublei negații)
T4	$\vdash : p \supset q \cdot q \supset r : p \supset r$	(principiul silogismului)
T5	$\vdash : p \supset q \cdot \supset \cdot \sim q \supset \sim p$	(principiul transpoziției)
T6	$\vdash : p \supset \sim p \cdot \supset \cdot \sim p$	(principiul *reductio ad absurdum*)
T7	$\vdash : p \vee p \cdot \equiv \cdot p$	(principiul tautologiei)
T8	$\vdash : p \equiv q \cdot \equiv \cdot \sim (p \equiv \sim q)$	
T9	$\vdash : \sim p \supset p \cdot \supset \cdot p$	(*demonstratio mirabilis*)
T10	$\vdash : \sim (p \equiv \sim p)$	

6. Reducerea sistemului la ideile primitive

Este ușor acum a dovedi că întreg acest „sistem" nu reprezintă decît ideile primitive, adică el nu este o „teorie" sau o știință — *nulla scientia* —, așa cum am demonstrat, în general, pentru orice sistem.

Să privim mai de aproape ceea ce s-a făcut *realmente* în această construcție.

a) S-au admis niște variabile propoziționale susceptibile să ia una din cele două valori A sau F, a treia valoare nu există, *tertium non datur*. Adică s-a admis prin aceasta *principiul terțiului exclus*. Fiecare variabilă poate lua una și numai una din valorile A și F, adică una cu excluziunea celeilalte, ceea ce înseamnă exact *principiul contradicției*.

Acceptarea variabilelor propoziționale p, q, r, $\cdots$ bivalente, susceptibile adică să ia una din valorile A și F, presupune principiul terțiului exclus, ca și principiul contradicției, care sînt conținute implicit în enunțul însuși al aceste exprimări.

b) introducerea semnului de negație „$\sim$" ne permite să exprimăm mai ușor aceste principii și să ne dăm seama că ele au fost deja admise.

Într-adevăr prin negație s-a exprimat direct și explicit principiul contradicției, fiindcă negația are ca efect de a inversa valoarea de adevăr a unei variabile, aceasta însemnînd că o variabilă propozițională oarecare p nu poate lua, în același timp, cele două valori A și F. Altfel negația nu ar putea avea efectul indicat de matricea ei:

p	$\sim p$
A	F
F	A

Cu alte cuvinte, introducerea negaţiei explicitează principiul conţinut deja în prima idee primitivă şi arată că o variabilă propoziţională nu poate lua simultan cele două valori A şi F.

c) Să considerăm a treia idee primitivă a lui Russell, aceea de disjuncţie logică, notată simbolic cu „V". Această idee nu este o idee logică propriu-zisă, ci serveşte, în primul rînd, să faciliteze formulările lingvistice (de altfel, acelaşi rol îl are şi negaţia). Într-adevăr, se poate caracteriza expresia numită disjuncţie „$p \vee q$" prin matricea:

p	q	$p \vee q$
A	A	A
F	A	A
A	F	A
F	F	F

fără a face să intervină ideea de „disjuncţie" (adică conjuncţia „sau"), de care ne servim în mod obişnuit în formulările lingvistice.

Pe de altă parte, se poate uşor arăta că cele două principii sînt un singur şi acelaşi lucru în sistemul formal din *Principia Mathematica*. Am văzut că în acest sistem conjuncţia logică este „definită" cu ajutorul noţiunilor primitive „negaţia" şi „disjuncţia":

$$p \cdot q . = \cdot \sim (\sim p \vee \sim q). \qquad \text{Df}$$

Dacă aplicăm această definiţie generală conjuncţiei $p \cdot \sim p$, obţinem prin definiţie

$$p \cdot \sim p \cdot = \cdot \sim (\sim p \vee p).$$

Sau, dacă negăm simultan cei doi membri ai definiţiei,

$$\sim (p \cdot \sim p) \cdot = \cdot \sim p \vee p.$$

Aceasta vrea să însemne că, în sistemul formal al lui Russell, principiul contradicţiei (primul membru al definiţiei) şi principiul terţiului exclus (al doilea membru) sînt definite unul prin altul şi că din punct de vedere formal nu sînt decît acelaşi lucru.

d) Am văzut că toate noţiunile introduse în sistemul lui Russell sînt definite cu ajutorul noţiunilor primitive; rezultă că toate aceste idei (conjuncţie, implicaţie, echivalenţă etc.) nu exprimă decît într-un mod abreviativ expresii lingvistice mai mult sau mai puţin complicate şi nu servesc decît a facilita formulările lingvistice.

Să scriem, de exemplu, axiomele sistemului lui Russell, ţinînd seama de faptul că semnul de implicaţie „$\supset$" este o abreviaţie definită.

Avem astfel

A1 $\vdash : \sim (p \vee p) \vee p$

A2 $\vdash : \sim q \vee (p \vee q)$

A3 $\vdash : \sim (p \vee q) \vee p \vee q$

A4 $\vdash : \sim [p \vee (q \vee r)] \vee q \vee (p \vee r)$

A5 $\vdash : \sim (\sim q \vee r) \vee [\sim (p \vee q) \vee p \vee r]$.

Fie acum una din teoremele sistemului, de exemplu, aceea numită „principiul silogismului" și notată în expunerea noastră cu $T4$:

$$T4 \vdash : p \supset q \cdot q \supset r : \supset : p \supset r$$

ceea ce se traduce: „Dacă p implică q și în același timp q implică r, atunci p implică r"

Să înlocuim semnul de implicație cu ajutorul definiției lui, revenind la semnele primitive, și atunci teorema T4 devine:

$$T4 \vdash : \sim[\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee r)] \vee \sim p \vee r.$$

Este evident că semnele abreviative au servit numai pentru a face comodă o expresie care, altfel, este tot atît de dificil de exprimat pe cît este de manipulat.

Este acum inutil să continuăm aceste transformări; se vede că toate expresiile valabile din sistemul propozițional al lui Russell, definiții sau tautologii, nu exprimă decît cele trei idei primitive, adică: 1) variabile propoziționale susceptibile să ia una din cele două valori A sau F; 2) negația; 3) disjuncția, și prin aceasta principiul contradicției sau cealaltă expresie formală a acestuia, principiul terțiului exclus.

Tautologiile sistemului propozițional considerat nu exprimă fiecare o regulă de deducție, cum credea Wittgenstein. El scria, într-adevăr[60]: *„In der Logik jeder Satz ist die Form eines Beweises"*. În realitate, toate aceste tautologii și definiții exprimă într-un chip divers, mai mult sau mai puțin complicat, același lucru: principiul contradicției (sau echivalentul lui formal, principiul terțiului exclus), singurul principiu care servește la deducția formală. Dar tocmai acest lucru îl afirmase Aristotel[61]: „Deci toate demonstrațiile se reduc la acest ultim principiu de contradicție; el este prin natura lui principiul tuturor celorlalte axiome".

Sistemul lui Russell exprimă deci prin expresii mai mult sau mai puțin complicate, formate cu variabilele $p, q, r, \cdots$, semnul de disjuncție „V" și negație „$\sim$", principiul contradicției sau (echivalentul său formal) principiul terțiului exclus.

Observația I.

Concluzia demonstrată în ceea ce precedă poate fi ilustrată prin metoda numită a „formelor normale".

Pentru a arăta că expresiile unui sistem logico-formal sînt totdeauna adevărate (tautologii), ele sînt reduse la o „formă normală", pe structura simbolică a cărora se poate citi ușor dacă sînt sau nu tautologii (propoziții adevărate).

De exemplu, Hilbert și Ackermann[62] arată că se pot transforma toate expresiile calculului propozițional în expresii care nu mai conțin decît semnele de negație, de disjuncție și conjuncție (ei mențin semnul de conjuncție — care poate fi exprimat cu ajutorul disjuncției — pentru a simplifica scrierea). Expresia exprimată astfel, numai cu aceste semne, se numește o „formă nor-

[60] L. Wittgenstein, *Tractatus ...*, prop. 6.1264.
[61] Aristotel, *Metafizica*, IV, III, 1005 b.
[62] D. Hilbert și W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, ed. a III-a, p. 10—12 (Berlin, 1949).

mală" a sistemului propozițional. Ei ajung apoi la concluzia că ceea ce este caracteristic pentru formulele adevărate (tautologii) este faptul că formele lor normale sînt conjuncții de disjuncții, care conțin fiecare cel puțin o variabilă propozițională, și negația ei, adică principiul terțiului exclus.

Altfel spus, toate formulele adevărate (tautologii) ale sistemului propozițional bivalent nu exprimă nimic altceva decît principiul terțiului exclus într-un mod mai mult sau mai puțin complicat. În aceasta constă „logicitatea" sistemului.

Observația a II-a

S-ar putea arăta cele ce am spus mai sus și pe altă cale, examinînd mai de aproape noțiunea de demonstrație. În mai multe rînduri, Aristotel insistă asupra diferenței ce trebuie făcută între silogism și „demonstrație". „Silogismul trebuie abordat înaintea demonstrației — scrie el — din cauza caracterului său mai general; demonstrația, în adevăr, este un fel de silogism, dar orice silogism nu este o demonstrație." [63]

Nu trebuie dar confundate schemele formale ale silogismului cu o demonstrație propriu-zisă, care are, cu adevărat, acest „caracter general" silogistic, dar nu este absorbită în întregime de această schemă formală. Pentru a avea o demonstrație efectivă, reală, de tip matematic, premisele de la care pleacă demonstrația trebuie să fie, în concepția lui Aristotel, *necesare, esențiale, proprii și nedemonstrabile* [64].

Dacă se reduce sistemul întreg la o construcție convențională de semne, atunci demonstrația însăși se reduce la scheme silogistice (sau alte scheme) și aceste scheme nu constituie demonstrații, ci numai scheme de demonstrații, după cum a arătat Aristotel. De aceea — și se vede acum cu ajutorul unui alt argument — într-un sistem formal nimic nu este demonstrat propriu-zis, ci se spune mereu același lucru, exprimat într-un alt mod, cu expresii mai mult sau mai puțin complicate.[65] În sistemele formale nu este vorba de *demonstrații*, ci de *transformări* ale expresiilor formate înăuntrul lor în altele echivalente.

IX. CONVENȚIONALISMUL LOGIC

Am arătat că, dacă se admite că axiomele unui sistem pot fi alese arbitrar, nu mai există decît două poziții posibile: poziția dogmatică; poziția relativistă.

Vom spune cîteva cuvinte despre poziția relativistă, care a degenerat într-un convenționalism extremist.

Teoreticianul acestei concepții este Rudolf Carnap, dar ea este acceptată mai mult sau mai puțin deschis de către toți care fac din logica simbolică

[63] Aristotel, *Primele analitice*, I, 4, 25 b.

[64] *Idem*, *Analiticele secunde*, I, 6, 7, 8, 9.

[65] Această concluzie a fost trasă de Wittgenstein. Într-adevăr, în analiza sistemului lui Russell, el ajunge la concluzia: *„Alle Sätze der Logik sagen aber dasselbe. Nämlich Nichts"*. — „Toate propozițiile logicii spun însă același lucru. Anume Nimic" (*Tractatus logico-philosophicus*, prop. 5.43). El repetă această concluzie și la prop. 6.11, explicînd că propozițiile logice nu spun nimic, fiindcă „sînt propoziții analitice".

un sistem formal şi în general de către cei care înlocuiesc teoriile ştiinţifice prin sisteme formale, unde semnul vid de orice conţinut este elementul fundamental şi unde punctul de plecare — deoarece cu necesitate trebuie undeva să ne oprim, după cum spunea Aristotel — pentru a putea să începem, este arbitrar ales.

Toţi logicienii matematicieni sînt de fapt convenţionalişti, pentru că admit posibilitatea de a construi sisteme logice echivalente, plecînd de la alte noţiuni primitive şi axiome.

Chiar şi intuiţioniştii (Brouwer, Heyting etc.) au construit logica lor „formală" în mod convenţional, alegînd anumite axiome pentru a ajunge la rezultatele scontate. Dar este evident că logica intuiţionistă poate fi axiomatizată, plecînd de la alte idei primitive (alţi „functori") şi de la alte axiome (şi se poate afirma acelaşi lucru pentru logicile polivalente).

Ceea ce a împins pe Carnap să teoretizeze convenţionalismul în logică şi în general în orice ştiinţă a fost exemplul dat de fizicieni, care s-au găsit în necesitatea de a accepta diverse postulate arbitrare, dar capabile să salveze coerenţa teoriilor lor (cum este postulatul scurtării dimensiunilor corpurilor în mişcare din teoria relativităţii). Apariţia geometriilor neeuclidiene şi, în sfîrşit, ideea lui Łukasiewicz (1917) de a construi logici polivalente, toate acestea au dat evident de gîndit că logica însăşi — transformată într-un sistem formal — se comportă în acelaşi mod. Sistemul formal, construit în mod relativ şi convenţional, a înlocuit teoria ştiinţei şi chiar logica.

În lucrarea sa, *Logische Syntax der Sprache*, Rudolf Carnap ridică concepţia sa convenţionalistă logică la rangul de principiu. După Carnap, logica nu este decît un limbaj şi „fiecare poate să-şi construiască logica după cum i se pare că e mai bine". În logică nu există morală — „*In der Logik gibt es keine Moral*" [66]. Această libertate de a-şi alege „logica sa", care devine o libertate completă de a alege convenţiile în virtutea cărora se construieşte un sistem logic, în care ne putem exprima, este enunţată de Carnap ca „principiul toleranţei" *(Toleranzprinzip)*. Singura obligaţie care mai rămîne pentru acela care-şi alege în mod liber „logica" sa, ori, după expresia lui Carnap, „o limbă logică", este de a ne spune în mod clar, dacă vrea să discute cu noi, cum vrea să procedeze, adică sintaxa după care îşi construieşte limbajul.[67].

Acest punct de vedere extremist a fost susţinut, mai înainte de Carnap, de K. Menger. Menger credea, de exemplu, că acceptarea axiomei alegerii *(Wahlaxiom* din teoria mulţimilor) poate să apară, din punctul de vedere al istoriei ştiinţelor, ca o acceptare dogmatică din partea unora sau ca un refuz egal de dogmatic din partea altora. Dacă faptele acceptării sau refuzului acestei axiome sînt interesante din punctul de vedere al biografiilor matematicienilor, scrie Menger, poate chiar pentru istorie, ele nu sînt şi pentru matematici şi logică. Logicianul se ocupă numai de ceea ce urmează din axioma alegerii.[68]

Reducînd totul la formalism ca singurul mod de a fi exact şi riguros, Carnap rămîne cu expresia formală nudă a gîndirii, a cărei coerenţă este aranjată convenţional. „Sarcina noastră nu este să stabilim prohibiţii — scrie el, înţelegînd prin acestea toate regulile pur logice care nu sînt alese liber —,

66 R. Carnap, *Logische Syntax der Sprache*, p. 45 (Viena, 1934).
67 *Ibidem*, p. 45.
68 K. Menger, *Der Intuitionismus* (în „Blätter für deutsche Philosophie", 4, 1930, p. 325).

ci de a ajunge la convenții". Carnap a crezut mai tîrziu că poate înlocui „principiul toleranței" prin „principiul convenționalismului" [69].

Rezultă din discuția de mai sus că aceia care acceptă sistemul formal al logicii, construit după cum am arătat, acceptă *principiul convenționalismului* în logică, și cu aceasta în orice sistem formal care presupune sistemul formal al logicii (teoria mulțimilor, de exemplu), chiar dacă nu se situează exact pe poziția lui Carnap, din punctul de vedere al concepției generale despre știință.

Vom menționa încă, fără a putea face aici o istorie a concepției convenționaliste, că o serie de logicieni optează pentru un convenționalism modificat, și alții cred că pot chiar să scape de convenționalism. De exemplu, N. Goodman, negînd noțiunea de „structură", afirmă că nu cunoaștem lumea decît într-atît cît o descriem. Și a descrie ceva înseamnă, pentru Goodman, a-l exprima într-un mod schematic și convențional.[70] Cu alte cuvinte, cunoașterea lumii se reduce la construcția unei „hărți" descriptive, care rezumă cantitatea enormă de informații pe care o avem la un moment dat asupra lumii și o face inteligibilă. Dar Goodman precizează despre convenționalismul său că nu este exact acela al lui Carnap. Într-adevăr, la Carnap, alegerea limbii logice sau chiar a unui limbaj nominalist sau platonician este considerată a fi o chestiune de pură convenție. În concepția lui Goodman, nu alegerea limbii logice este o chestiune de convenție; convențional este modul în care realitatea este pusă în acest cadru, adică alegerea elementelor de bază ale sistemului construit.

Pentru a scăpa de problemele foarte grave implicate de poziția convenționalistă, W. V. Quine adoptă o concepție filosofică analitică, care ar avea darul, după el, să salveze un sistem formal și să-i dea o semnificație. El afirmă că orice propoziție a unui sistem științific este lipsită de sens dacă este luată izolat. Numai totalitatea propozițiilor unui sistem, luate ca un întreg, poate avea un sens [71], unele din propoziții avînd o poziție centrală, altele o poziție periferică în interiorul sistemului. Primele ar corespunde, în concepția lui Quine, aproximativ propozițiilor sintetice, ultimele propozițiilor analitice. Quine spune că afirmația lui Kant, după care cunoașterea noastră se împarte în propoziții sintetice și analitice distincte, avînd un sens ca atare, este o dogmă fără nici o bază [72]. Vom sublinia că Quine, ca și Goodman, a redus filosofia la analiza logistică a limbajului (ceea ce se numește filosofia analitică).

Se poate remarca însă că nici una din aceste concepții nu poate să se detașeze de convenționalismul limbajului „logic" construit, cu toate aceste eforturi de a da o semnificație sistemelor vide de orice semnificație.

Transformînd teoria științei într-un sistem formal, logisticienii au rămas cu foarte puțin. Problema care se pune atunci este următoarea: procedînd astfel, nu s-a pierdut însăși legătura cu procesele gîndirii logice? O remarcă de natura aceasta a fost făcută de Stephan Körner, care notează [73]: „Filosofia matematicienilor, ca analiză a structurii gîndirii matematice, poate intra în conflict cu matematicile și chiar să piardă contactul cu subiectul ei sau încă să rămînă în urmă în raport cu dezvoltarea lor actuală".

[69] R. Carnap, *Introduction to Semantics*, p. 247 (Cambridge, Massachusetts, 1942).
[70] N. Goodman, *The Way the World Is* (în „The Review of Metaphysics", 14, 1960).
[71] W. V. Quine, *From a Logical Point of View* (Cambridge, Massachusetts, 1953).
[72] *Ibidem*, p. 41.
[73] Stephan Körner, *On the Revelevance of Post Gödelian Mathematics to Philosophy* (in *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, 1967).

Este evident că, în cazul sistemelor formale ale logicii și în general ale științei, această concluzie se aplică cu atît mai mult: ele au pierdut contactul cu subiectul pe care își propuseseră să-l studieze.

X. SOLUȚIA LUI ARISTOTEL

Am văzut care sînt condițiile care, o dată satisfăcute, dau unui corp de idei și propoziții calitatea de știință. Principiile trebuie să fie mai bine cunoscute decît concluzia, ele sînt anterioare și mai simple decît ceea ce derivă din ele pe cale de demonstrație.

Construcția reală a unei științe presupune deci două moduri de cunoaștere: 1) cunoașterea principiilor; 2) cunoașterea demonstrațiilor, care, prin datele problemei, trebuie să fie de natură diferită în raport cu cunoașterea principiilor. Cu alte cuvinte, trebuie să ne oprim undeva, ἀνάγκη στῆναι; trebuie cu necesitate să ne oprim la axiome, dar ce ne obligă să acceptăm mai curînd pe unele decît pe altele?

Trebuie să constatăm că nimeni nu a putut să iasă din această necesitate absolută, în construcția unei teorii științifice, fără să se oprească la axiome. Dar, acceptîndu-le în mod convențional, se simulează construcția reală a unei teorii și totul se reduce la a enunța cercuri vicioase, după cum am văzut.

Să examinăm acum punctul de vedere al lui Aristotel și modul cum el accepta axiomele fără demonstrație. Nu vom intra în toate detaliile acestei concepții, fiindcă ceea ce ne interesează este să arătăm că Stagiritul a oferit o soluție care poate face ca o teorie să funcționeze, în baza structurii ei. Iată ce scrie el în capitolul final al *Analiticelor secunde* [74]: „Vrem acum să lămurim noțiunea de principiu, anume în ce fel și cu ajutorul cărei facultăți cunoaștem principiile. [...] S-a stabilit la început [75] că nu putem cunoaște nimic prin demonstrație dacă nu cunoaștem primele principii imediate. În ceea ce privește cunoașterea principiilor imediate, se poate discuta dacă ea este de aceeași natură cu cunoașterea prin demonstrație, dacă cele două cunoașteri merită amîndouă numele de știință sau dacă numai una din ele este știință și cealaltă un alt gen de cunoaștere, în fine, dacă această facultate de cunoaștere a principiilor s-a născut o dată cu noi sau fără să o știm, sau dacă nu a existat mai înainte, ci a fost dobîndită." Concluzia lui Aristotel este fără echivoc: trebuie să existe o facultate specială de cunoaștere imediată a principiilor ca atare, diferită de cunoașterea prin demonstrație. Altfel știința nu este posibilă, după cum am avăzut. Dar știința este posibilă, și Aristotel avea deja în fața lui părți importante și destul de dezvoltate ale științei: geometrie, astronomie, aritmetică etc. Deci această facultate de cunoaștere, alta decît demonstrația, este implicată de însăși existența științei.

Aristotel procedează acum la explicarea celor două surse ale cunoașterii. Pentru aceasta el distinge două părți ale intelectului uman, ale *Noûs*-ului: intelectul pasiv — νοῦς παθητικός — și intelectul activ — νοῦς ποιητικός [76].

[74] *Op. cit.*, II, 19, 99 b.
[75] *Ibidem*, I, 2, 71 b.
[76] Denumirea de νοῦς ποιητικός apare de fapt la urmașii lui Aristotel. El întrebuința expresia νοῦς ἀπαθής — intelectul nepasiv.

Să vedem acum care sînt, în concepția lui Aristotel, funcțiile intelectului pasiv. Acesta, după cum arată și denumirea lui, primește cunoștințele într-un mod pasiv; el este o *tabula rasa*, pe care nu s-a scris la început nimic [77]. El este în potență toate formele inteligibile, dar nu ajunge la act decît prin experiență.

Inteligibilul — universalul, τὸ καθόλου — este conținut în sensibil [78]. Cunoașterea își are începutul în simțuri. Dar, precizează Aristotel, știința nu vine o dată cu experiența, dimpotrivă, în urma experienței; de exemplu, știința nu vine din vedere, ci în urma vederii.

Din senzație se naște amintirea, din amintirea des repetată a aceluiași obiect se naște experiența. Experiența duce la descoperirea generalului, a unuia în mai mulți [79]. Experiența este pentru om punctul de plecare al științei și al artei [80].

Astfel, din amintirea senzațiilor repetate, omul face să iasă experiența, adică, prin comparație și abstracție, el degajează universalul din particular, în care el este „conținut". Universalul este ceea ce convine oricărui individ (cuprins sub noțiunea respectivă), ceea ce poate deci să fie totdeauna afirmat, și aceasta pentru că el face parte din esența Ființei — καθ' αὑτό καὶ ᾗ αὐτό—, pentru că-i aparține necesarmente — ἐξ ἀνάγκης ὑπάρχει [81].

Astfel inducția extrage din experiență generalul; inducția procură în modul acesta noțiunile generale, care vor fi termenii de care se va servi demonstrația.

Domeniul științei — ἐπιστήμη — bazată pe experiență este opera raționamentului — λογισμός — și a intelectului pasiv — νοῦς παθητικός. Totuși lucrurile nu devin inteligibile decît prin intervenția intelectului activ — νοῦς ποιητικός. Inducția presupune astfel, ca și demonstrația, anumite principii — și aici se arată meritul lui Aristotel, fiindcă a legat cunoașterea, prin aceasta, atît de experiență, cît și de intelect.

Principiile în virtutea cărora se efectuează inducția și demonstrația sînt sesizate de intelectul activ printr-o intuiție intelectuală, fără nici un element intermediar. Această intuiție dă inteligibilitate principiilor științei, inducției și demonstrației. Fără această intuiție intelectuală, știința întreagă rămîne în întregime neinteligibilă, fiindcă nici inducția, nici demonstrația nu pot să se explice prin ele însele, ci prin principii, și acestea își găsesesc explicația în faptul că sînt sesizate direct printr-un act de intuiție intelectuală.

Iată cum explică Aristotel însuși necesitatea acestor două „părți" ale intelectului (*De anima*, III, 5, 430 a): „După cum există în natura întreagă, pe de o parte, materia care este în potență, toți indivizii cuprinși în același gen și, pe de altă parte, cauza eficientă, pentru că ea dă fiecărui individ forma sa, după cum arta fasonează materia, trebuie necesarmente ca aceste două lucruri să se găsească în suflet. Trebuie deci să distingem două intelecte: primul reprezentînd materia gîndirii, al doilea fiind cauza și forma sa."

[77] Aristotel, *De anima*, III, 429 a.

[78] *Ibidem*, III, 432 a.

[79] *Idem*, *Analiticele secunde*, II, 19, 100 a.

[80] *Idem*, *Metafizica*, I, 1, 981 a.

[81] *Idem*, *Analiticele secunde*, I, 4, 73 b.

Știința nu poate începe decît de la principii universale, pe scurt de la universal, care este sesizat direct de intelectul activ. Nu există decît știință a universalului. [82]

Aristotel a elaborat astfel o teorie prin care a dat o soluție problemei: cum este posibilă știința? Ea arată că principiile științei au o garanție *sine qua non,* fiindcă ele sînt mai simple, anterioare și mai bine cunoscute decît adevărurile demonstrate ale științei.

S-ar părea însă că Aristotel, pentru a salva știința, a fost obligat să introducă o ipoteză suplimentară, aceea a intelectului activ, care este garanția principiilor. Dar nu este așa. Într-adevăr, Stagiritul afirmă că intelectul activ este locul geometric al inteligibilelor; cu alte cuvinte, sesizînd inteligibilele, intelectul activ se confundă cu inteligibilele. Și numai astfel el poate afirma că *a ști înseamnă a fi.* Intelectul activ, în actul de a sesiza inteligibilul, devine el însuși inteligibilul: obiectul cunoscut și subiectul cunoscător fuzionează la nivelul cel mai înalt al acestui act noetic, ceea ce ajunge să fie un act ontologic. Acest lucru a fost enunțat de Aristotel în formula celebră: gîndirea care se gîndește singură — ἡ νόησις νοήσεως νόησις. Aceasta este cea mai mare „dignitate" acordată vreodată gîndirii.

Iată cum explică lucrul acesta O. Hamelin, unul dintre cei mai buni comentatori ai lui Aristotel: „Să nu uităm că gîndirea se rezolvă în gîndirile *(pensées)* care o constituie: ἡ νόησις νοήματα sau, pentru a evita să introducem aici pluralitatea, ἡ νόησις τὸ νόημα; nu există substanță gînditoare fără gîndire, prin urmare cum să punem un subiect în fața obiectului? Nu există alt subiect pentru νόημα decît νόησις (și νόησις nu are alt obiect decît νόημα; nu există decît idei sau mai curînd nu există decît o idee). Intelectul în potență nu este altceva decît receptacolul formelor în posibilitate: intelectul complet în act este forma însăși. Iată, după cum pare, care este semnificația formulei: ἡ νόησις νοήσεως νόησις"[83].

Acest sens este afirmat în mai multe rînduri chiar de Aristotel. „Astfel — scrie el —, gîndirea se gîndește singură, participînd la inteligibil, fiindcă devine ea însăși inteligibilul, intrînd în contact cu obiectul și gîndindu-l, astfel încît intelectul și inteligibilul se confundă, devenind identice. Fiindcă receptacolul inteligibilului și al științei este gîndirea, care, manifestîndu-se în act, posedă inteligibilul." [84]

Trebuie să recunoaștem că, cel puțin din punctul de vedere al tehnicii logicii, soluția lui Aristotel este extraordinară. Într-adevăr, principiile sînt sigure, au o certitudine absolută, care nu le este conferită de altceva decît de intelectul activ, care dacă ar fi numai o garanție pentru ele, ar constitui—din punct de vedere logic — numai o ipoteză în plus. Dar intelectul activ nu este o garanție externă, el este toate aceste principii, care îl explicitează în funcția lui în act.

Aristotel poate deci să conchidă: „Deoarece numai intelectul activ este mai adevărat decît știința, principiile sînt obiectele intelectului activ. Aceasta este adevărat și pentru motivul că demonstrația nu este principiul demonstrației, deci nici știința nu este principiul științei. Dacă în afară de

[82] *Ibidem,* I, 31, 87 b.
[83] O. Hamelin, *La théorie de l'intellect d'après Aristote et ses contemporains,* publicată cu o *Introducere* de E. Barbotin, p. 22 (Paris, 1953).
[84] Aristotel, *Metafizica,* XII, 7, 1 072 b.

știință nu posedăm nici o facultate de cunoaștere a adevărului, intelectul activ trebuie să fie principiul științei. Astfel intelectul activ este principiul principiului științei, după cum totalitatea științei este într-un raport asemănător cu totalitatea lucrurilor." [85]

Principiile științei sînt, prin aceasta, perfect asigurate, pentru că ele sînt intelectul activ însuși, existența sa în act nefiind decît principiile. De la el și de la explicitarea lui în principii începe orice știință. Formula lui Aristotel: ἀνάγκη στῆναι primește un sens precizat complet: trebuie să ne oprim la intelectul activ; actul de oprire este un act ontologic, fiindcă *a ști* se identifică, la acest nivel, cu *a fi*. Astfel, trebuie necesarmente să ne oprim la principii, fiindcă aceste principii sînt și ale intelectului activ, care, în ultimă analiză, este, în funcția lui noetică, existența însăși.[86]

Se cuvine să subliniem aici că, printre aceste principii, Aristotel citează principiul contradicției, care este principiul tuturor celorlalte axiome.[87] Se vede astfel ce importanță primordială are logica pentru orice știință în general și că originea însăși a logicii se găsește în principiul contradicției, de unde nevoia tuturora și în toate epocile de a începe studiul filosofiei și al științelor de la logică, cum au făcut cei vechi și ceea ce scolasticii au repetat neîncetat: „Trebuie să se înceapă de la logică" — *„oportet a logica incipere"*.

XI. CONCLUZII

Să formulăm acum concluziile care se impun din analiza precedentă.

1. Argumentarea lui Aristotel este irefragabilă. Nu există știință fără principii — trebuie să ne oprim la principii.

2. O știință ale cărei principii nu sînt asigurate altfel decît sînt asigurate concluziile obținute prin demonstrație este o știință fie dogmatică, fie convenționalistă, adică nu este propriu-zis o știință.

3. Un sistem științific care admite „principii" prin convenție provoacă relativitatea principiilor și a teoremelor și devine circular. Nimic nu mai este justificat și sistemul întreg devine o convenție arbitrară, complet coerentă (eventual), dar unde, după cum am arătat, nu se mai poate spune decît A este A.

4. Problema esențială a oricărei teorii științifice este, prin urmare, să se găsească principiile ei, care, fiind fondate altfel decît concluziile, nu pot lua niciodată locul acestora din urmă în cadrul teoriei.[88]

[85] *Idem, Analiticele secunde*, II, 19, 100 a.

[86] Acest act de oprire trebuie pus în legătură, pentru a fi înțeles deplin, cu primul motor — πρῶτον κινοῦν — , care, deși mișcă totul, cu necesitate trebuie să fie nemișcat, după Aristotel. În același mod, devenirea gîndirii trebuie să aibă începutul ei într-un act de nondevenire, de oprire, și acest lucru este subliniat de el în mai multe rînduri, după cum spune, de exemplu, în *Fizica*, VII, 3, 247 b: „Dobîndirea de la început a științei nu este o naștere, pentru că noi spunem a ști și a gîndi înseamnă că rațiunea este în repaus și în oprire, iar în repaus nu există naștere".

[87] Aristotel, *Metafizica*, IV, 4, 1 006 a.

[88] În această ordine de idei sînt demne de menționat lucrările lui J. L. Destouches, care a făcut o analiză interesantă și originală a teoriilor fizico-matematice. Examinînd partea preliminară a unei teorii fizice, Destouches scrie: „Astfel, o teorie fizică nu este numai o

5. În particular, logica formalizată, prezentată de logicieni contemporani ca un sistem formal, nu este o știință, ci un sistem.[89]

Observație

Există totuși o școală de matematicieni care se îndepărtează pînă la un punct de această relativitate a sistemelor formale. Aceasta este școala intuiționistă și în special școala olandeză a lui Brouwer și Heyting.

Intuiționismul contemporan socotește ca precursor pe Henri Poincaré, care era un antiformalist înverșunat. „Dacă se reduce gîndirea matematică — scria el — la formule vide, este sigur că o mutilăm." Ceea ce nu-l împiedica să conceapă știința ca „o limbă bine făcută", care se compune din convenții „comode". Cu toate acestea, el acorda un loc intuiției în procesul cunoașterii științifice (fără însă a explica această facultate), ca un *„contrepoid de la logique"*. „Logica — spunea el — nu este suficientă, trebuie ca intuiția să-și păstreze rolul de complement".[90]

Iată care sînt cele două teze principale ale intuiționismului, după Heyting [91]:

1. Matematica nu are numai o semnificație formală exclusiv, ci și o semnificație în conținut.

2. Obiectele matematice sînt sesizate într-un mod imediat de spiritul gînditor, cunoștința matematică este independentă de experiență.

Gîndirea exactă este exclusiv gîndirea matematică și de aceea ea nu poate presupune nici o altă știință fiindcă oricare altă știință, întrucît este exactă, este o știință matematică. Ar fi atunci circular să se încerce fundarea matematicilor pe baza unei alte științe, fiindcă aceasta ar însemna să le fundăm pe ele însele.

Nu mai rămîne ca sursă a matematicilor decît intuiția care — după această școală — ne pune sub ochi, într-un mod indiferent și clar, concepte și raționamente. Dar ce este intuiția brouweriană? Iată explicația pe care o dă Heyting: „Nu trebuie să înțelegem intuiția brouweriană în sensul că

teorie deductivă; dacă ea trebuie să posede acest caracter, trebuie să conțină înainte de toate o parte nedeductivă care să preceadă enunțul axiomatic, parte căreia i-am dat numele de sinteză *inductivă*. Destouches constată că există trei părți ale unei teorii deductive: 1) *Sinteza inductivă*; 2) *enunțul axiomatic*; 3) *teoria deductivă* propriu-zisă. După Destouches, sinteza inductivă nu se reduce la inducție, ea este mai vastă decît inducția și foarte diferită de aceasta. „Sinteza inductivă — scrie el — este explicația sau sugestia, prin toate procedeele posibile, a tuturor elementelor care conduc la introducerea cutăreia noțiuni sau cutărui postulat". Noi vedem, în introducerea acestei noțiuni de „sinteză inductivă", necesitatea lui Aristotel de a se opri la noțiuni și principii, altfel cunoscute decît concluziile. A se vedea: J. L. Destouches, *La Synthèse inductive comme fondement des concepts et des énoncés primitifs d'une théorie physique* (în volumul colectiv *The Foundations of Statements and Decisions*, editat de A. Ajdukiewicz, Varșovia, 1965, p. 240). Această idee apare deja în teza lui Destouches, *Essai sur la forme générale des Théories physiques* (Roumanie, Cluj, 1938). Ea este explicată, de asemenea, de către autor în ale sale *Principes fondamentaux de physique théorique* (3 vol., Paris, 1942).

[89] Trebuie să atragem atenția că Aristotel nu a considerat logica drept o teorie. Logicienii scolastici, moștenitori ai capitalului aristotelic, au susținut, de-a lungul întregului Ev Mediu, că logica nu e știință, ci *modus scientiarum*, modul, principiul, procedeul celorlalte științe. Vezi pentru dezvoltări asupra acestei chestiuni studiul nostru *La Logique classique et les systèmes formels* (în „Revue Roumaine des Sciences Sociales", série de Phil. et Logique, 3, 1966).

[90] H. Poincaré, *La Valeur de la science* (Paris, 1905).

[91] A. Heyting, *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie*, p. 3 (Berlin, Springer, 1934).

ea ne-ar procura într-un chip «mistic» o înțelegere a lumii. Intuiția nu este altceva decît facultatea de a contempla ca izolate anumite concepte și raționamente, care apar în gîndirea obișnuită." [92]

Introducerea intuiției în știință ar putea să o salveze de pericolul de a se vedea mutilată de formalismul pur, cum spunea Poincaré, dar sînt două observații, cel puțin, ce se pot face, cu privire la această concepție.

1) Intuiția apare în teoria lui Brouwer și a adepților lui ca un element nedefinit, mai curînd ca un *deus ex machina*, capabilă să salvgardeze matematicile de dificultățile lor, dar incapabilă să le explice, fiind ea însăși inexplicabilă. Intuiționismul brouwerian ar trebui supus deci unei elaborări noi și complete, pentru a arăta natura exactă a intuiției și rolul ei precis în dezvoltarea matematicilor.

2) Fascinați de formalism, intuiționiștii din școala lui Brouwer au formalizat „logica intuiționistă", transformînd-o într-un sistem formal relativ și convențional. Aceasta este opera lui Heyting [93].

Este deci clar că intuiționismul lui Brouwer are nevoie de o nouă elaborare, care ar putea să-l îmbogățească enorm dacă ar ține seama, poate, de exemplu, de teoria intuiției intelectuale a lui Aristotel.

Sistemele formale ale logicii au avut însă un succes răsunător prin aplicațiile lor practice în domeniul tehnic: mașini electronice, mecanisme automate, mașini de tradus, explicația funcțiilor neuronilor etc. și, prin aceasta, au primit o confirmare indiscutabilă.

Vom remarca însă — fără a dezvolta aici chestiunea aceasta, pe care o vom vedea într-un alt studiu — că nu s-a aplicat logica la aceste mașini, ci un sistem formal care poate primi diverse interpretări și una din aceste interpretări poate fi mecanică sau mecanică-lingvistică etc. În acest caz, cu adevărat s-a făcut o „hartă" în sensul lui Goodman, de care am vorbit, care exprimă convențional modul foarte general al funcționării unui mecanism, dar aceasta nu are de-a face nimic cu teoria logicii. Din punct de vedere practic, nu se poate reproșa nimic acestor sisteme; dimpotrivă, ele constituie succese tehnice. Se poate face un plan al pieselor unei mașini, și acest lucru este obișnuit pentru ingineri, dar nimeni nu ar putea spune că acest plan este un „sistem logic"; se poate face, de asemenea, o hartă a construcției schematice și a funcționării unui mecanism automat, și iarăși nimeni nu va putea spune că această hartă este un „sistem logic". Goodman avea dreptate: într-adevăr, s-a redactat, în cazurile acestea, o simplă hartă convențională, care servește scopurilor noastre practice.

Acest lucru reiese și din faptul că între modul de dezvoltare a unui sistem formal și între modul de funcționare a unei mașini există identitate de natură: așa-zisele demonstrații din sistemele formale nu sînt demonstrații propriu-zise, ci numai transformări ale datelor inițiale, după cum am arătat; un mecanism nu poate face nimic mai mult decît să transforme, fiindcă aceasta este tocmai misiunea și natura lui. Este suficient să observăm o mașină oarecare, de la acelea de fabricat obiecte pînă la acelea care transformă energia,

[92] *Ibidem*, p. 12.
[93] A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik*, p. 42—56 (Sitzungsberichte der deutsch. preuss. Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1930).

pentru a ne da seama imediat de acest lucru. Există, desigur, într-o teorie şi transformări; dar teoria nu se reduce la ele, pentru că într-o teorie principiile, în sensul aristotelic, sînt mai bine cunoscute, anterioare şi imediate. Concluziile care urmează din principii, deşi pot fi privite şi ele ca o transformare, nu se reduc la atît.[94]

În ceea ce priveşte „inteligibilitatea" faptelor, care le-ar fi dată de sistemul formal în cadrul căruia ele sînt descrise convenţional (Goodman), vom face observaţia că această „inteligibilitate" se reduce exclusiv la noncontradicţia sistemului formal respectiv (după cum am arătat). Acest lucru este însă foarte puţin, cu atît mai mult cu cît această noncontradicţie este stabilită convenţional (exigenţa lui Goodman). Dar este suficient să examinăm o teorie matematică efectivă, de exemplu geometria euclidiană, pentru a ne da seama că o teoremă oarecare nu se găseşte la locul ei în această teorie numai fiindcă este necontradictorie cu celelalte propoziţii ale geometriei. Noncontradicţia este o condiţie necesară a inteligibilităţii, dar nu şi suficientă.

Dar acelora care vor să justifice valoarea ştiinţei numai prin latura ei practică (desigur necesară, care confirmă o teorie, dar nu este şi nu poate fi o teorie), H. Poincaré le-a răspuns de mult timp: *„Ce serait prendre la question par son petit côté"* [95].

Theory and System, Cappelli editore, Bologna, 1970
Biblioteca del Dialogo.

[94] Vom atrage atenţia asupra apropierii pe care o face prof. Edward G. B. Ballard între un sistem de convenţii, pe care îl consideră ca un „model-gîndire" *(thought-model)*, şi construcţia unei maşini. La sfîrşitul Renaşterii, după el, şi la începutul epocii moderne, maşina a devenit „regele modelului de gîndire". Lumea era privită ca o maşină şi convenţiile în termenii cărora era explicat travaliul unei maşini serveau, de asemenea, să explice travaliul universului. Fără îndoială, ideea lui Laplace, prin care acesta imagina o *Inteligenţă*, care, cunoscînd toate poziţiile şi vitezele fiecărei particule a universului, ar cunoaşte prin aceasta întreg trecutul şi întreg viitorul universului, este, datorită acestui *thought-model*, un mecanism automat, construit într-un mod analog cu o maşină, prin convenţii (E. G. Ballard, *Reason and Convention*, Tulane Studies in Philosophy, vol. I, New Orleans, 1964, p. 21—42).

[95] H. Poincaré, *La Valeur de la Science*, p. 157 (Paris, 1905).

Structura axiomatică a științei moderne

I. GÎNDIREA AXIOMATICĂ

O serie de dificultăți, care vor fi menționate mai departe, întîmpinate de matematicieni în construcția științei lor, au făcut ca modul de organizare al unei teorii să fie cercetat mai de aproape. Examinînd structura logică a unei teorii deductive, s-a constatat că există o schemă comună tuturor acestor teorii. Se pot distinge, *grosso modo*, în structura oricărei științe, două părți: 1) o parte dată — concepte acceptate fără definiție și propoziții considerate adevărate fără demonstrație; 2) concepte derivate prin diverse tipuri de definiție (precis enunțate) și propoziții derivate cu ajutorul unor reguli de deducție (precis enunțate). Separarea și studierea, cu grijă, a acestor părți și în special a părții *date* — care se numește de aceea partea axiomatică a teoriei — formează metoda axiomatică. Deși la început s-a aplicat numai teoriilor pur matematice, ea a devenit apoi absolut necesară în construcția oricărei teorii deductive. Metoda axiomatică ne dă o schemă conceptuală precisă a teoriei cercetate cu ajutorul acestei metode, și nimic nu se poate ivi pe parcursul dezvoltării teoriei fără ca să ne putem da seama de cauzele logice care au provocat rezultatul observat. O asemenea metodă este ideală pentru orice teorie — nu numai pentru cele matematice — și a ajuns un instrument indispensabil oricărei cercetări științifice. În acest sens, Hilbert scria [1]: „Tot ceea ce poate constitui în genere obiect al gîndirii științifice revine, de îndată ce se află în pragul constituirii teoriei, metodei axiomatice și prin aceasta revine mijlocit matematicii. Înaintînd spre straturi tot mai adînci de axiome [...], se obține totodată și o înțelegere din ce în ce mai adîncă a esenței gîndirii științifice și devenim conștienți în tot mai mare măsură de unitatea cunoașterii noastre. Sub auspiciile metodei axiomatice, matematica pare a fi chemată să dețină un rol conducător în cadrul științelor în genere."

II. AXIOMATICA LUI ARISTOTEL

Metoda axiomatică nu apare numai în timpurile noastre, cînd a luat o dezvoltare extraordinară, definindu-și condițiile cu toată precizia și mijloacele de a satisface aceste condiții, în special prin cercetările lui Hilbert.

[1] David Hilbert, *Axiomatisches Denken* (în „Mathematischen Annalen", Bd. 78, 1918, p. 405—418); traducere și în limba română în volumul *Logică și filosofie* (București, Ed. politică, 1966).

Ea apare încă la cei vechi şi este aplicată cu toată rigoarea în *Elementele* lui Euclid. Dar teoreticianul axiomaticii antice este Aristotel. Iată care este structura unei teorii deductive în concepţia lui.

Mai întîi, ştiinţa are ca scop, în concepţia Stagiritului, cunoaşterea universalului şi nu există decît o ştiinţă, aceea a universalului. Individul nu face obiectul ştiinţei şi pentru aceasta el nu este inteligibil. Acest lucru va fi preluat de scolastici, care vor repeta tot timpul: *scientia est universalium.* Universalul, în unul din aspectele lui, este esenţa lucrurilor εἶδος — , care este sesizat prin definiţie. Din această cauză, o definiţie nu poate fi exprimată decît printr-o propoziţie universală. Introducerea universalului se face astfel prin definiţie, care va indica genul (γένος) şi diferenţa specifică [2] (διαφορὰ εἰδοποιός).

Aşadar, termenii unei teorii — sau conceptele — sînt introduşi prin definiţie, care, după cum arată şi numele — ὁρισμός — , este o „limitare" sau „delimitare", aşa cum ne-o spune şi cuvîntul latin respectiv, *definitio.*

Pentru ca raţionamentul să se poată desfăşura, el trebuie să plece de la ceva dat. Punctul de plecare al unui raţionament poate fi:

1. Definiţie (ὁρισμός).
2. Axiomă (ἀξίωμα).
3. Afirmaţie (θέσις).
4. Ipoteză (ὑπόθεσις).
5. Postulat (αἴτημα).

Definiţia nu pune existenţa unui lucru (cum fac celelalte patru), ci arată numai ce este un lucru şi nu că el este.

Axiomele, zice Aristotel, sînt principiile pe care trebuie să le pătrundă acela care vrea să înveţe ceva. [3] „Numesc principiul imediat al unui silogism o « teză » (afirmaţie) dacă aceasta nu poate fi demonstrată şi dacă nu este nevoie să fie pătrunsă de acela care vrea să înveţe ceva."

Dacă o teză admite o parte ori alta dintr-o enunţare, adică afirmă ori existenţa, ori neexistenţa unui lucru, atunci ea este o „ipoteză".

În sfîrşit, postulatul este o propoziţie care este considerată ca adevărată fără să fie evidentă. [4]

Instrumentul deductiv, prin care dîndu-se unele lucruri ajungem la altele, este silogismul, căruia Aristotel i-a acordat un studiu larg, închinîndu-i în întregime *Primele analitice.*

Aceasta este structura axiomatică a unei teorii ştiinţifice — ἐπιστήμη ἀποδεικτική — aşa cum o găsim la Aristotel. Dar, pentru a nu fi nici o îndoială că el a avut o idee clară şi explicită despre construcţia axiomatică a unei teorii, iată textual cum rezumă el însuşi această structură [5]: „Într-adevăr, orice ştiinţă demonstrativă presupune trei elemente:

1) ceea ce ea pune de la început ca existent (adică: genul ale cărui atribute esenţiale ea le examinează);

2) aşa-numitele axiome, care sînt premisele prime ale demonstraţiei sale;

[2] Expresia *differentia specifica* apare ca traducere a expresiei întrebuinţate de Aristotel (διαφορὰ εἰδοποιός) abia la Boethius.

[3] Aristotel, *Analiticele secunde* I, 2, 72 a.

[4] *Ibidem*, I, 10, 76 b.

[5] Aristotel, *op. cit.*, I, 10, 76 a şi 76 b.

3) atributele al căror înțeles îl acceptă știința. Totuși unele din științe pot foarte bine să treacă cu vederea, fără neajunsuri, unele din aceste elemente."

Demonstrația prin care se dezvoltă știința apodictică este silogismul[6]. În termeni moderni, teoria științei la Aristotel poate fi redată astfel [7]:

O teorie deductivă este un sistem S de propoziții, care satisfac următoarele postulate (semnul $\in$ este semnul de apartenență).

I. Orice propoziție care aparține lui S ($p \in S$) trebuie să se refere la un domeniu specific de entități reale.

II. Orice $p \in S$ trebuie să fie adevărată.

III. Pentru orice consecință q a lui p avem $q \in S$ dacă $p \in S$.

IV. Există un număr (finit) de termeni în S, astfel că

a) sensul acestora este evident prin el însuși;

b) orice alt termen din S este definisabil cu ajutorul acestor termeni.

V. Există în S un număr (finit) de propoziții, astfel că:

a) adevărul acestor propoziții este evident prin el însuși;

b) adevărul oricărei alte propoziții care aparține lui S poate fi stabilit prin inferență logică, plecînd de la aceste propoziții.

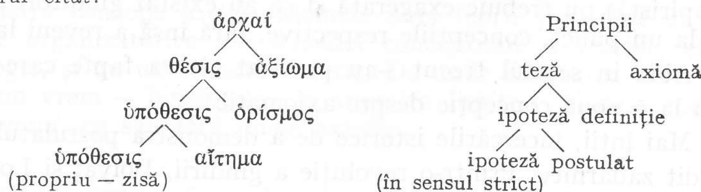
Postulatele (I), (II) și (III) sînt numite de Beth[8], respectiv, *realitatea, adevărul* și postulatul de *deductibilitate*. Postulatele (IV) și (V) împreună constituie așa-numitul *postulat de evidență*; termenii de bază și propozițiile din postulatele (IV) și (V) sînt numite *principiile* științei respective.

Nu vom intra în amănuntele acestor calificări date de Beth. Vom spune că, pentru gînditorul olandez, teoria axiomatică a științei a lui Aristotel cere o *metafizică* ca știință a principiilor. Am arătat însă că acest lucru nu corespunde textelor și nu vom relua discuția aici.

Ceea ce vom sublinia însă este că Aristotel considera indispensabil, în descrierea unei științe, existența unor termeni și propoziții cunoscute altfel decît ceilalți termeni și propoziții din S.

Trebuie să ne oprim undeva, ἀνάγκη στῆναι, pentru a putea începe, și această exigență, indispensabilă pentru construirea unei teorii, ne obligă să ne oprim la termeni care nu sînt definiți și la propoziții care nu sînt demonstrate. Ele trebuie cu necesitate *să fie cunoscute*, spune Aristotel, altfel decît prin demonstrație.[9]

[6] Nu vom intra în discuția destul de amplă care s-a făcut de către istoricii filosofiei și ai științei pentru a se stabili toate sensurile celor cinci categorii de propoziții inițiale citate mai sus. O distincție ierarhică și dihotomică a fost făcută de Jules Vuillemin în interesantul său articol: *Problèmes de validation dans les axiomatiques d'Euclide et de Zermelo*, în volumul *The Foundation of Statements and Decisions* (Varșovia, 1965). Iată această ierarhizare a principiilor după autorul citat:



[7] Vezi E. W. Beth, *The Foundations of Mathematics*, p. 30 (Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1965),

[8] *Ibidem*, p. 32.

[9] Aristotel, *Analiticele secunde*, I, 1, 71 a.

Cu alte cuvinte, putem preciza discuţia de mai sus după cum urmează. Axiomatica lui Aristotel descrie structura unei ştiinţe S astfel:

1. *Partea axiomatică*
   a) termenii *cunoscuţi* prin ei înşişi;
   b) propoziţii *adevărate* prin ele însele.
2. *Partea derivată*
   a) termeni definiţi (cu ajutorul celor deja cunoscuţi);
   b) propoziţii demonstrate ca adevărate în S, în baza celorlalte propoziţii deja admise.
3. *Metoda de demonstraţie*

Aceasta este silogismul.

Remarcăm că nici un moment Aristotel nu admite că este posibil să plecăm de la termeni necunoscuţi (dar acceptaţi ca fiind cunoscuţi, ceea ce nu le conferă absolut nimic) şi nici de la propoziţii al căror adevăr nu este evident (dar acceptate ca adevărate, ceea ce, de asemenea, nu le conferă nimic).

III. EVOLUŢIA CONCEPTULUI DE AXIOMATICĂ

Structura axiomatică aristotelică a ştiinţei a predominat pînă în timpul nostru, mai precis pînă la începutul secolului nostru.

După această concepţie, ştiinţa trebuie să plece de la evidenţe şi să aibă o bază empirică (fiindcă „evidenţele", deşi erau descoperite de intelectul „superior" sau „activ", ele erau extrase din materia individualizată). Cu aceasta, ştiinţa avea o dublă faţă: noetică şi ontologică.

De pe la anul 1600 (dezbaterile istorice pot fi urmărite însă mult mai departe, pînă la Antichitate), ştiinţa lui Aristotel se bifurcă: pe de o parte, avem numai faţa raţională a ştiinţei, pe de alta, numai faţa empirică a ştiinţei. Filosofia ştiinţei este predominată fie de una, fie de cealaltă latură a teoriei aristotelice a ştiinţei.

De exemplu, raţionalismul, aşa cum era profesat de Descartes, se inspiră în primul rînd de la ideile aristotelice de evidenţă şi postulatul deductibilităţii [10], pe cînd empirismul lui Locke se inspiră mai cu seamă de la aspectul empiric al concepţiei Stagiritului.

Desigur, se poate observa că opoziţia acestor două şcoli (raţionalistă şi empiristă) nu trebuie exagerată şi că au existat gînditori care au împăcat, pînă la un punct, concepţiile respective, fără însă a reveni la Aristotel.

Abia în secolul trecut s-au precizat cîteva fapte care au condus mai tîrziu la o nouă concepţie despre axiomatică.

Mai întîi, încercările istorice de a demonstra postulatul lui Euclid s-au dovedit zadarnice. Printr-o revoluţie a gîndirii, Bolyai şi Lobacevski reuşesc simultan, deşi independent, să construiască geometrii perfect coerente, con-

[10] E.W. Beth, *op. cit.*, p. 38.

siderînd postulatul lui Euclid fals. S-au putut astfel construi corpuri de propoziții geometrice perfect articulate, deși s-a eliminat din grupul de propoziții axiomatice celebrul postulat.

În a doua parte a secolului al XIX-lea, matematicienii s-au ocupat în mod special de bazele logice ale științei lor. Lucrările lui Dedekind și Cantor au fost decisive în această direcție; ele s-au finalizat în teoria mulțimilor menită să fundamenteze aritmetica și prin aceasta analiza și, prin urmare, matematicile în întregime.

Totuși teoria mulțimilor s-a izbit de la început de cîteva dificultăți, dintre care cea mai gravă a fost aceea că în interiorul ei s-au ivit unele contradicții imposibil de evitat. Pentru a le înlătura, matematicienii și logicienii s-au gîndit să apeleze la o axiomă suplimentară (cel puțin una), care să împiedice construirea unor propoziții susceptibile să degenereze în contradicții.

Faptele de genul acesta s-au multiplicat în special la începutul secolului nostru, cînd fizica a dat, în unele experiențe, peste situații imposibil de explicat și de admis. Se știe că experiențele lui Michelson-Morley pentru măsurarea vitezei absolute a pămîntului (față de eter) au dat un rezultat absurd: cu toată precizia uimitoare a aparatelor de măsurat și cu toate că experiența a fost repetată, luîndu-se cele mai mari precauții, rezultatul acestor măsurători a condus la concluzia inadmisibilă că pămîntul este nemișcat, că are viteza zero. Pentru a explica acest rezultat — și numai pentru a explica acest rezultat —, a trebuit să se introducă o axiomă arbitrară: aceea a contracției dimensiunilor unui corp în mișcare în raport cu viteza pe care o are.

Această ipoteză acceptată de Einstein a fost explicit admisă ca neputînd să fie verificată sau confirmată.

O dată făcut începutul acesta, fizica nu s-a mai ținut deloc de indicația aristotelică a evidenței adevărului unei axiome, ci a deschis larg poarta admiterii axiomelor, devenite acum ipoteze, dacă ele sînt capabile să explice rezultatele experimentale luate în considerație. Cu alte cuvinte, părăsind structura aristotelică a teoriei, structură ierarhică piramidală, care începe de la adevăruri evidente și sfîrșește la adevăruri demonstrate, știința modernă a răsturnat teoria; ea caută axiome-ipoteze care să explice faptele sau să le prevadă, fără a se mai interesa de axiomele de la care pleacă.

Această concepție s-a extins pînă și în logică, unde axiomele sînt alese convențional; astfel s-au putut construi diverse sisteme de logică, logici polivalente, care nu mai consideră valabil principiul terțiului exclus sau atenuează alte principii, cum este acela al dublei negații etc.: logica lui Heyting [11], logica lui Łukasiewicz [12] etc. sînt astfel de logici.

Epoca noastră concepe astfel axiomele unei teorii științifice ca fiind simple elemente organizatorice ale schemei conceptuale a teoriei; ele au un rol metodologic, și nu un caracter noetic. De unde libertatea de a alege axiomele așa cum vrem — bineînțeles în anumite limite — și de a construi teorii așa cum voim, cu sau fără unele axiome.

[11] A. Heyting, *Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik* (în „Sitzungsberichte der Preuss. Akademie der Wiss., Phys.-Math. Klasse", Berlin, 1930).

[12] J. Łukasiewicz, *Philosophische Bemerkungen zu mehrwertigen Systemen des Aussagenkalküls* (în „Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie", XXIII année, 1930).

IV. CONCEPȚIA MODERNĂ A TEORIEI

Am văzut cum a evoluat conceptul de teorie, precum și motivele care au determinat această schimbare de concepție. Vom preciza acum caracteristicile acestei concepții, care nu apare brusc, ci este întrevăzută încă din secolul al XVII-lea. De exemplu, J. H. Lambert [13], cercetînd teoria paralelelor, își dă seama că „fundamentarea geometriei trebuie să facă abstracție de reprezentarea lucrului" și că „demonstrațiile trebuie să fie expuse pur simbolic".

Concluzia aceasta este o consecință necesară o dată ce nu mai era vorba de adevărul propozițiilor primitive, ci de studiul compatibilității tuturor propozițiilor unei teorii.

Cel care a enunțat însă pentru prima dată condițiile axiomatice ale unei teorii în formă modernă este Moritz Pasch.[14]

El desparte cu toată rigurozitatea conceptele matematice în două categorii: nedefinite și definite. Propozițiile sînt grupate de asemenea în două categorii: propoziții principale și propoziții demonstrate. Ideea lui Pasch este următoarea: matematica pune în evidență relații între conceptele matematice, care trebuie să corespundă faptelor din experiență, dar în marea lor majoritate nu sînt împrumutate din experiență, ci „demonstrate". De fapt, scria el, dacă geometria vrea să fie cu adevărat deductivă, trebuie ca procesul deducției să fie peste tot independent de *sensul* conceptelor geometrice, așa cum trebuie să fie independent de figuri; se pot lua în considerație numai *relațiile* dintre conceptele geometrice incluse în propozițiile, respectiv, în definițiile folosite. În *cadrul* deducției, este desigur permis și util —*dar în nici un caz necesar*—să ne gîndim la semnificația conceptelor geometrice care apar; în cazul că acest lucru devine necesar înseamnă tocmai că deducția avea lacune, că propozițiile premergătoare sînt insuficiente ca mijloace de demonstrație.

Ideea că demonstrația — și cu aceasta teoria întreagă—trebuie să fie independentă de semnificația conceptelor (și prin aceasta a propozițiilor) a fost teoretizată de David Hilbert. Pentru el, problema fundamentelor logice ale matematicilor este o problemă *despre* matematică, iar știința care se va ocupa de această problemă va fi *metamatematica*. Aceasta va fi o logică specială, care nu este independentă de matematică: noțiunile fundamentale logice presupun noțiuni fundamentale aritmetice și noțiunile matematice presupun noțiuni de bază logice. Întreg sistemul logico-matematic al unei teorii va consta dintr-un angrenaj de simboluri, fiindcă el elimină explicit orice conținut din aceste simboluri. Așa cum spune Reymond [15], „este un joc de forme pure, căci din datele primitive nu se consideră decît capacitatea lor de a fi ordonate într-un mod sau altul și formele noi ce se construiesc nu sînt decît relațiile originare, privite din alt punct de vedere".

[13] J. H. Lambert, *Theorie der Parallellinien* (în „Magazin fur reine und angewandte Mathematik", 1786).

[14] M. Pasch, *Vorlesungen über die moderne Geometrie* (Leipzig, 1882).

[15] Arnold Reymond, *Les Principes de la logique et la critique contemporaine* (Paris, 1932).

Iată cum procedează Hilbert [16] pentru a construi, de exemplu, sistemul formal al geometriei euclidiene.

Concepem, spune el, trei sisteme de obiecte: numim obiectele primului sistem *puncte* și le notăm cu *A, B, C, ...*; numim obiectele celui de-al doilea sistem *drepte* și le notăm cu a, b, c, ...; numim obiectele celui de-al treilea sistem *plane* și le notăm cu α, β, γ, ...; punctele se mai numesc și *elemente ale geometriei liniare*, punctele și dreptele se numesc *elemente ale geometriei plane* și punctele, dreptele și planele se numesc *elementele geometriei în spațiu.*

Concepem, spune Hilbert mai departe, punctele, dreptele și planele în anumite relații reciproce și numim aceste relații prin cuvinte ca: „a fi situat", „între", „a fi paralel", „congruent", „continuu"; descrierea exactă a acestor relații se obține prin *axiomele geometriei.*

Putem împărți axiomele geometriei în cinci grupe; fiecare grupă exprimă anumite fapte fundamentale care aparțin împreună intuiției noastre. Aceste grupe de axiome le numim în modul următor:

$I_1—I_8$: opt axiome de incidență;
$II_1—II_4$: patru axiome de ordonare;
$III_1—III_5$: cinci axiome de congruență;
IV : axioma paralelelor;
$V_1—V_2$: axioma de continuitate.

Aceste axiome au nevoie de o examinare mai de aproape. În primul rînd, pentru a asigura coerența sistemului, ele trebuie să fie *necontradictorii*; în al doilea rînd, ele trebuie să fie *independente*; în sfîrșit, ele trebuie să fie *complete,* pentru ca toate teoremele să poată fi deduse din aceste axiome. Vom discuta mai departe aceste condiții.

Deocamdată vom spune că Hilbert își alege axiomele atîtea cîte îi trebuie, și aceasta în mod liber. El reconstruiește astfel geometria într-un mod care să-i dea o schemă conceptuală riguroasă, dar nu ține seama de modul construcției ei naturale și istorice. Rezultatul acesta este o consecință a concepției moderne despre adevărul propozițiilor matematice și în special al axiomelor: ele, fiind golite de conținut, sînt golite și de adevăr, iar acceptarea lor se face prin alegere liberă.

De la această concepție, a libertății de alegere a axiomelor, s-a ajuns la ideea că ele sînt convenții. Primul care a enunțat în mod explicit ideea că axiomele geometriei sînt convenții a fost celebrul matematician francez H. Poincaré. Iată textual ce scrie el [17]: „Axiomele geometriei nu sînt deci nici judecăți sintetice apriori, nici fapte experimentale. Ele sînt convenții; alegerea noastră, printre toate convențiile posibile, este *ghidată* de fapte experimentale, dar ea este *liberă* și nu este limitată decît de necesitatea de a evita orice contradicție. În felul acesta, postulatele pot rămîne *riguros* adevărate, chiar atunci cînd legile experimentale care determină adoptarea lor nu sînt decît aproximative. Cu alte cuvinte, *axiomele geometriei* (nu vorbesc de cele ale aritmeticii) nu sînt decît definiții deghizate." În concepția

[16] David Hilbert, *Über die Grundlagen der Geometrie* (în „Mathematische Annalen", 1902).

[17] H. Poincaré, *La Science et l'hypothèse* (Paris, Flammarion, 1909).

modernă a teoriei, punctul de plecare este prin urmare convențional. Acest lucru apare în mod natural o dată ce conținutul conceptelor și propozițiilor nu trebuie să mai joace nici un rol în desfășurarea teoriei. Convenționalismul și formalismul sînt o consecință naturală a concepției după care axiomele sînt numai necesități metodologice, pentru a da posibilitatea construirii unei teorii, dar nu au nici un caracter noetic, și nu se poate pune chestiunea dacă ele sînt adevărate sau nu.[18]

V. CONDIȚIILE GENERALE ALE GRUPULUI AXIOMATIC

Preocuparea vechii concepții a teoriei era să găsească în primul rînd condițiile adevărului unei propoziții, adică, acele criterii *din afara* teoriei care fac ca noțiunile primitive și propozițiile primitive să fie acceptate. O dată ce ideea aceasta este părăsită, nu mai există decît o singură preocupare: aceea a raportului interior, dinăuntrul teoriei, dintre elementele teoriei.

Schema formală generală a unei teorii deductive apare astfel:

I. *Partea axiomatică*:
1. Termeni nedefiniți;
2. Propoziții primitive (axiome);
3. Reguli de derivare
   a) pentru termeni (definiții);
   b) pentru propoziții (reguli de deducție).

II. *Partea derivată*:
4. Termenii definiți;
5. Propozițiile demonstrate (teoreme).

În general se consideră ca parte axiomatică numai grupul de propoziții primitive (axiome), dar, după cum se vede, termenii nedefiniți, precum și regulile de derivare (a termenilor și propozițiilor) fac parte din grupul axiomatic. Atît regulile de definiție, cît și regulile de deducție sînt acceptate axiomatic și ele deci trebuie să fie supuse unui examen tot atît de riguros ca și axiomele propriu-zise ale unei teorii deductive. Ceea ce, în general, nu s-a făcut și s-au acceptat reguli de definiție și de deducție printr-o alegere liberă, fără a se demonstra că ele sînt necesare și suficiente.

Iată acum condițiile interioare pe care trebuie să le satisfacă termenii primitivi și axiomele unei teorii, punîndu-le în paralel.[19] Toate acestea privesc numai dependența lor reciprocă.

Termeni	*Propoziții*
Conceptele domeniului vor fi ordonate în modul următor: anume concepte, „conceptele fundamentale", vor fi așezate la începutul teoriei.	Propozițiile domeniului vor fi ordonate în modul următor: anume propoziții, „propozițiile", „axiomele", vor fi așezate la începutul teoriei.

[18] Pentru convenționalismul științei contemporane în logică, a se vedea și lucrarea noastră *Teorie și sistem* din acest volum.

[19] Cităm aceste condiții după *Abriss der Logistik* a lui R. Carnap (Viena, 1929).

Toate celelalte concepte vor fi „concepte derivate" din acestea prin definiții.

Sistemul conceptelor fundamentale este supus următoarelor condiții:

1 a. Conceptele fundamentale trebuie să fie suficiente pentru definirea celorlalte concepte.

1 b. Definițiile trebuie să fie necontradictorii.

2. Condiția de economie. Conceptele fundamentale trebuie să fie necesare pentru definirea celorlalte concepte. Sau, altfel, grupul de concepte fundamentale trebuie să fie insuficient dacă se elimină unul din ele; sau încă, nici unul din aceste concepte nu poate fi definit din celelalte concepte fundamentale (independența conceptelor).

Toate celelalte propoziții vor fi derivate ca teoreme din axiome.

Sistemul axiomelor este supus următoarelor condiții:

1 a. Axiomele trebuie să fie suficiente pentru deducerea celorlalte propoziții.

1 b. Axiomele trebuie să fie necontradictorii.

2. Condiția de economie. Axiomele trebuie să fie necesare pentru deducerea celorlalte propoziții; sau, altfel, grupul axiomatic de propoziții trebuie să fie insuficient dacă se elimină una din axiome; sau încă, nici o axiomă nu poate fi dedusă din celelalte axiome (independența axiomelor).

Pe scurt, termenii primitivi și propozițiile primitive trebuie să satisfacă următoarele trei condiții: 1) suficiență; 2) necontradicție; 3) independență.

Cercetarea și găsirea unor metode de rezolvare a acestor trei condiții fac în special obiectul axiomaticii și au ridicat probleme dificile.

Se vede că ceea ce deosebește axiomatica modernă de cea aristotelică este tocmai punerea acestor probleme, a căror rezolvare cere eforturi foarte mari. De altfel, rezolvarea acestor probleme nu s-a putut face decît în cazuri particulare. Vom sublinia că aceste trei probleme s-au ivit tocmai din cauza conținutului conceptului de teorie, în matematicile moderne, care, nemaiavînd un contact cu realitatea, care să o garanteze, a trebuit să fie o schemă care se garantează singură.

VI. SISTEMELE FORMALE

După cum s-a văzut din expunerea noastră, de la Aristotel și pînă în timpul nostru, conceptul de teorie deductivă a trecut printr-o serie de avataruri. J. Vuillemin [20] crede că poate distinge, în această evoluție, trei etape.

1. *Prima etapă* corespunde *axiomaticii materiale*. Geometria, dioptrica și catoprica lui Euclid, statica lui Arhimede, mecanica cerească a lui Newton, termodinamica lui Clausius se pot da ca exemple. La stadiul acesta se disting, într-o teorie științifică, principii indemonstrabile sau „propoziții imediate" și teoremele pentru a putea reieși în mod clar care sînt principiile de care depinde o teoremă. La acest stadiu definițiile sînt explicite; cuvintele limbajului axiomatic sînt semne care se referă la lucruri existente, cărora ele le dau un criteriu distinctiv fie că sînt lucruri concepute ca existente în mod real, cînd se dau în plus procedeele de construcție, fie că sînt concepute ca fiind numai posibile.

[20] J. Vuillemin, *op. cit.*, p. 178.

2. *A doua etapă* corespunde *axiomaticii formale,* care este un nou grad de abstracție.

Nu se mai admit lucruri a căror realitate sau posibilitate ar preceda de drept stipulațiile axiomelor și ar risca totdeauna să le debordeze în fapt, ci se substituie definițiilor explicite definiții implicite.Trebuie să fie eliminate la acest stadiu toate elementele care, prin efectul habitudinilor mentale, sînt adăugate stipulărilor efective, pentru a nu admite decît pe acelea pe care axiomele le comandă. Sistemele se constituie atunci independent de diverse interpretări posibile sau modele care ar putea fi date. Ele devin forma unei teorii ca putînd *a priori* să trateze cu un egal succes toate aplicațiile izomorfe. Cartea a V-a a *Elementelor* lui Euclid, silogistica lui Aristotel, axiomatica lui Zermelo etc. pot ilustra ca exemple o asemenea axiomatică formală.

3. *Axiomatica formalistă* se distinge de axiomatica formală și aduce în plus o teorie proprie a demonstrației. Logica propozițiilor la stoici anticipează acest stadiu atins abia de metamatematica lui Hilbert. Singurele probleme care se pun pentru un sistem formal sînt acelea de necontradicție, suficiență și independență. Întreg sistemul este construit, subliniem, prin alegere liberă.[21]

Iată cum precizează ideea de sistem formal J. Ladrière.[22] Într-un *sistem formal pur,* orice referință la un domeniu de sens exterior este eliminată grație întrebuințării unui limbaj simbolic riguros definit; procedeele de deducție admise sînt date complet. Desigur, notează Ladrière, intuiția nu poate fi eliminată niciodată în mod total. Dar ea nu se mai referă la conținutul conceptelor sau expresiilor; ea se reduce la intuiția manipulărilor definite asupra unui sistem de semne. Este de ajuns să se poată identifica un semn, de a distinge două semne diferite, de a înlocui un semn printr-un altul după un model de substituție.

Explicațiile care însoțesc axiomele și regulile sistemului nu sînt, evident, indispensabile; ele sînt destinate numai să faciliteze lectura expresiilor simbolice. Sistemul are un sens în el însuși, independent de orice explicație sau interpretare.[23]

Iată acum ceea ce este caracteristic acestei axiomatici formaliste, așa cum precizează Ladrière: „Trecerea la axiomatica formală modifică profund sensul axiomaticii: prioritatea care este acordată enunțurilor luate ca punct de plecare devine în adevăr relativă. Ea nu mai este fondată pe simplicitate sau pe un mai mare grad de evidență, ci numai pe comoditate. Alegerea enunțurilor inițiale devine în întregime arbitrară. În principiu, orice sistem de enunțuri poate fi luat ca sistem de axiome; singurul lucru care interesează este să se poată deduce din ele întreaga teorie. Cu alte cuvinte, sistemul axiomatic nu mai are ca scop de a face să apară ordinea naturală care există între enunțurile unei teorii, ci de a introduce o ordine care, în sine, poate fi oricare." [24]

[21] J. Vuillemin crede totuși că problemele de validare a axiomelor s-au pus și în Antichitate, și aici sîntem de acord cu el. Dar, după părerea noastră, aspectul acesta este relativ; evident, raportul părților unei teorii a venit în discuție și la Euclid, și la Eudoxiu, dar nu validarea acestui raport garanta teoria, ci cunoașterea principiilor ca atare. Însă acest lucru presupune o referință din afara sistemului.

[22] J. Ladrière, *Les Limitations internes des formalismes* (Louvain-Paris, 1957).

[23] *Ibidem*, p. 37.

[24] *Ibidem*, p. 38.

VII. CONSTRUCȚIA UNUI SISTEM FORMAL

Iată în continuare cum se construiește un sistem formal în mod axiomatic și care sînt problemele care se pun cu privire la el.

După cum s-a văzut, conceptul de teorie deductivă a fost înlocuit cu acela de sistem formal. Un sistem formal, spune Ladrière, este o mulțime de teoreme care se obțin cu ajutorul unor reguli precise și obiective. Ladrière găsește două părți distincte într-un sistem formal: o parte *morfologică*, care descrie constituenții sistemului, și o parte *axiomatică*, care definește o clasă de teoreme.

A. Morfologia

Aceasta cuprinde două părți:
1. *Componentele sistemului*, care va cuprinde:
a) o listă de componente primitive,
b) o listă de operații asupra acestor componente,
c) reguli de formare, cu ajutorul cărora se pot fabrica noi componente, plecînd de la cele primitive.
2. *Propozițiile sistemului* (asamblaje de semne avînd un sens), parte care va indica:
a) o listă de operatori propoziționali,
b) reguli de formare, care indică cum se pot forma, cu ajutorul componentelor sistemului, *propoziții elementare* și cum se pot obține din acestea *propoziții complexe*.

B. Partea axiomatică

Aceasta va cuprinde:
a) o listă de propoziții considerate valabile (axiome);
b) reguli de derivare, cu ajutorul cărora se obțin propoziții valabile din altele valabile.

Cu privire la un sistem formal, după Curry [25], sînt trei lucruri care trebuie considerate distinct: *prezentarea, reprezentarea* și *interpretarea*.

1. *Prezentarea unui sistem*
Aceasta este construcția formală a sistemului sau formularea lui cu ajutorul unei mulțimi de simboluri.

2. *Reprezentarea unui sistem*
Punerea în corespondență biunivocă a componentelor primitive cu elementele unei clase bine definite de obiecte se numește reprezentarea sistemului. Aceasta înseamnă o „concretizare" a sistemului.

3. *Interpretarea unui sistem*
Interpretarea diferă de reprezentare deoarece corespondența care se stabilește, pentru ca un sistem să fie „interpretat", se face între propozițiile

[25] H. B. Curry, *Some Aspects of the Problem of Mathematical Rigor* (in „Bulletin of the American Mathematical Society", vol. 47, 1941).

elementare ale sistemului și o clasă dată oarecare de enunțuri, al căror adevăr sau falsitate este determinat (ă), independent (ă) de sistem. Propozițiilor derivabile din sistem le corespund atunci *enunțuri adevărate*.

În definitiv, construcția sistemului ca sistem este un simplu joc de simboluri, conform unor reguli precis date. Sistemul capătă un sens *ad hoc* prin interpretarea lui, și anume un sens teoretic.

Pentru mai multă precizie vom adăuga încă unele detalii, fără a întîrzia prea mult asupra acestei chestiuni fiindcă problema pe care o urmărim aici este o problemă de principiu. Anume vom adăuga că, din punct de vedere tehnic, interpretarea unui sistem se leagă de noțiunea de model. Iată cum descrie noțiunea de model Ladrière.[26]

Un *model* este o mulțime de elemente Mn puse în corespondență cu componentele unui sistem S, astfel că:

1° propozițiilor din sistemul S le corespund enunțuri formate cu elementele mulțimii Mn;
2° se poate determina, independent de sistemul S, dacă un atare enunț este adevărat sau fals;
3° propozițiilor derivabile din S le corespund enunțuri adevărate din Mn.

Interpretarea unui sistem revine astfel la a da un model pentru sistem.

VIII. FILOSOFIA SEMNULUI

După cum vedem, evoluția axiomaticii a ajuns la punctul ei — considerat culminant — în creația sistemelor formale. Ideea de a considera știința ca o limbă bine făcută (așa cum spunea H. Poincaré) s-a realizat în sistemul formal, o limbă perfect organizată, cu o sintaxă și o semantică perfect definite. Un asemenea limbaj va fi cu atît mai obiectiv cu cît va fi mai lipsit de orice contact cu intuiția noastră, lipsit de orice conținut, și nu va avea un sens decît în momentul cînd este interpretat. Semnul a devenit centrul preocupărilor teoretice referitoare la construcția unei științe.

Încă de la începutul acestor cercetări, legate în special de construcția ca sistem formal a logicii, Bertrand Russell scria [27]: „Adoptarea regulilor simbolismului în procesul deducției ajută intuiția în regiuni prea abstracte pentru ca imaginația să poată prezenta minții prompt adevărata relație dintre ideile întrebuințate [...]. Și astfel mintea este condusă să construiască șiruri de raționamente în regiuni în care imaginația ar fi cu totul incapabilă să se susțină singură, fără ajutor simbolic." Acest lucru este adevărat. Serii de concepte, serii de judecăți și chiar raționamente pot fi acoperite de o notație simbolică bine aleasă, care concentrează și declanșează toate aceste serii de concepte sau operații, devenite familiare, de îndată ce simbolul apare undeva în cursul procesului deductiv. Folosul simbolismului este indiscutabil. Cu ajutorul unui simplu simbol se pot concentra și efectua operații mentale

[26] *Ibidem*, p. 44.
[27] B. Russell și A. N. Whitehead, *Principia Mathematica*, vol. I, p. 2 (Cambridge, 1910).

complexe, care, fiind binecunoscute, nu mai au nevoie să fie detaliate, ci numai simbolizate, astfel ca rezultatul să apară automat.

Matematica face uz de asemenea notații simbolice, care acoperă largi procese mentale, în mod frecvent. Familiarizarea cu acest procedeu simbolic a dus însă la identificarea procesului simbolic cu procesul mental respectiv, de unde o credință aproape mistică în puterea semnului. S-a făcut astfel o confuzie între simbol și ceea ce este simbolizat, socotind că simbolismul însuși are o virtute creatoare intrinsecă. Hilbert este responsabil în bună parte de această confuzie. Autoritatea acestui mare matematician a impus și ideile filosofice emise de el unei întregi direcții în epocă, care abia începe să se dezmeticească din impasul în care a fost adusă teoria științei în timpul nostru. Pentru Hilbert, esența matematicii — și prin aceasta a oricărei teorii de tip matematic — este acest joc de semne făcut după reguli precise. Simbolul nu este pentru Hilbert un auxiliar al memoriei, ci definește un fel de spațiu abstract cu atîtea dimensiuni cîte grade de libertate sînt în operația concretă și imprevizibilă a combinației.[28] Semnul, spune Hilbert, posedă în esența lui o regulă intelectuală care garantează contra erorii, este condiția creației prin mobilitatea sa în sensibil. Lui, scrie el, nu aplicației *(Abbildung)* lui Dedekind, îi datorește matematica întreaga origine și dezvoltare: *„Am Anfang, so heisst es hier, ist das Zeichen"* [29] („La început, așadar, este semnul").

Simbolul — și în general formalismul — este util și practica matematică a demonstrat utilitatea lui; concepția după care desfășurarea jocului simbolic poate avea un sens în el însuși, fără gîndirea care îi dă suport, rămîne o iluzie. Idealizarea simbolului vid presupune o filosofie platonică vidă, un cer de semne fără conținut la care poate participa lumea obiectivă, al cărei fundament se găsește în neantul semnului. Această concepție este inadmisibilă iar, din punct de vedere istoric, este cea mai slabă concepție platonizantă cunoscută.

IX. MULTIPLICITATEA MODELELOR

Am văzut că sistemul capătă o interpretare în momentul cînd i se construiește un model. Sistemul formal fiind construit arbitrar, el nu are nici o legătură cu modelul cu care este pus în corespondență biunivocă. De unde rezultă în mod principial posibilitatea de a construi oricîte modele voim pentru același sistem. Acest lucru este considerat de către unii filosofi ai matematicilor ca un progres față de axiomatica veche. Interpretarea arbitrară a unui sistem este însă o consecință ineluctabilă a construcției lui convenționale și lipsite de orice contact din afară. Aceasta înseamnă: deoarece un sistem poate avea o serie indefinită de modele, structura logico-formală pe care o dă acelui model nu aparține esențial modelului. Cu alte cuvinte, nu avem aici decît următoarele alternative:

[28] J. Cavaillès, *Axiomatique et Système formel*, p. 93 (Paris, Hermann, 1938).

[29] D. Hilbert, *Neubegründungen der Mathematik* (în „Hamburger Seminars Einzelschriften", 1928, p. 173).

1) sau sistemul formal nu reprezintă nici o structură, de aceea poate avea interpretări diferite, prin modele diferite;

2) sau el reprezintă numai o schemă ordonatoare convențională, pentru ca modelul să fie organizat, dar nu avem nici o indicație că ar fi chiar organizarea propozițiilor adevărate din model.

Am putea da o serie de exemple pentru a arăta că asemenea construcții axiomatice arbitrare nu au nici o putere de a arăta specificitatea unui model (adică a unei mulțimi de propoziții adevărate): de pildă, faptul că în sistemul formal al lui Russell și Whitehead din *Principia Mathematica* există o pluralitate de sisteme de numere naturale. Cum am spus, acest rezultat este imposibil de evitat pentru orice sistem formal construit axiomatic în mod arbitrar, fiindcă în modul acesta el nu se poate pune în corespondență cu un model unic, a cărui specificitate ar reda-o, ci o serie indefinită de modele.

Faptul acesta (al pluralității sistemelor de numere naturale) este caracterizat de Fraenkel și Bar-Hillel astfel[30]: „Există în această teorie (a lui Russell), fapt aproape paradoxal, o infinitate de clase vide. Dar mai de neașteptat și mai de necrezut pentru matematicieni este existența unei pluralități de sisteme de *numere* (naturale). Se definesc numerele de clase, anume drept clasele tuturor claselor (de un același tip) echivalente cu o clasă determinată, și fiecare tip antrenează existența unui sistem propriu de numere. Această consecință este destul de neplăcută, mai întîi, prin impresia penibilă pe care o dă, apoi, și mai ales, pentru că ea pretinde întrebuințarea unui formalism complicat, necesar tratării acestei pluralități de sisteme de numere."

Recunoscînd caracterul paradoxal al „multiplicității modelelor", A. Grzegorczyk[31] face următoarele observații: "Fiecare sistem mai interesant are mai multe modele, descrie deci, în același timp, mai multe domenii ale realității. A urmări să vorbim doar despre un singur domeniu este, prin urmare, nereal. Aritmetica, de pildă, are multiple modele și nu există o metodă formală de a distinge numerele naturale *adevărate*. Se pare că soluția este doar aceasta: doi matematicieni care se ocupă de aritmetică se gîndesc la unul și același obiect denumit mulțimea numerelor naturale."

X. INDEPENDENȚA AXIOMELOR

Am notat că ideea de independență a axiomelor, în raportul lor reciproc, își are originea în poziția specială a postulatului lui Euclid în cadrul geometriei. S-a văzut că putem scoate acest postulat din grupul axiomatic, putem să-l înlocuim chiar cu o propoziție contradictorie față de el, și totuși se poate construi o teorie a unei geometrii neeuclidiene perfect coerentă. Prin urmare, postulatul lui Euclid este independent față de celelalte axiome.

Noțiunea de independență are două aspecte, care în general nu au fost concepute distinct:

[30] A. Fraenkel și J. Bar-Hillel, *Le Problème des antinomies* (în „Révue de Métaphysique et de Morale", 1939, nr. 2).

[31] Andrzej Grzegorczyk, *Schiță istorică*, studiu apărut în volumul *Logică și filosofie*, p. 17 (București, 1966).

1) Independența unei axiome față de celelalte din grupul axiomatic al unei teorii înseamnă imposibilitatea deducerii ei din celelalte. Este o exigență economică — conform adagiului lui Ockam — după care principiile nu trebuie multiplicate, și această condiție este perfect justificată. Schema conceptuală a unei teorii va fi cu atît mai bine sesizată cu cît este mai simplă, cu cît va avea mai puține axiome.

2) Independența axiomelor arată însă, în cadrul axiomatizării moderne, și posibilitatea de a introduce în grupul axiomatic o propoziție (independentă de celelalte) în mod arbitrar sau de a scoate o astfel de propoziție din grupul axiomatic. Această idee apare de la prima vedere bizară.

Ce înseamnă că o axiomă este independentă? Pentru sistemele formale, aceasta înseamnă că axioma nu este deductibilă din celelalte. Să revenim la postulatul lui Euclid. Avem următoarele tipuri de geometrii [32]:

1. *geometria euclidiană* cu postulatul lui Euclid valabil, în care suma unghiurilor unui triunghi este egală cu două unghiuri drepte;

2. *geometria neeuclidiană* de tipul Lobacevski-Bolyai, cu postulatul lui Euclid nevalabil (printr-un punct exterior unei drepte se duc două drepte paralele la dreapta dată) și cu suma unghiurilor unui triunghi mai mică decît două unghiuri drepte;

3. *geometriile de tipul Riemann*, cu postulatul lui Euclid nevalabil (nu se duce nici o paralelă) și suma unghiurilor unui triunghi mai mare decît două unghiuri drepte.

Geometria lui Euclid își găsește realizarea pe plan; Beltrami a arătat (1868) că geometria lui Lobacevski-Bolyai poate fi realizată pe o pseudosferă, care este o suprafață reală de rotație, născută prin rotirea curbei numite tractrice. Dreptele din plan devin geodezicele pseudosferei.

Geometria lui Riemann (fără paralele) își găsește realizarea pe o sferă, reală, unde cercurile mari înlocuiesc dreptele din plan.

Dar aceste suprafețe, planul, pseudosfera și sfera, pe care au loc geometriile respective, sînt suprafețe cu curbura lui Gauss constantă. Ea este nulă pentru plan, este negativă în cazul pseudosferei și pozitivă în cazul sferei.

Cu toate aceste rezultate, din care se vede imediat că suma unghiurilor unui triunghi, precum și valabilitatea postulatului lui Euclid sînt în legătură directă cu noțiunea de curbură a suprafeței, logicienii și matematicienii nu au tras nici o concluzie în ceea ce privește *natura* dreptelor paralele. Dar noțiunea de drepte paralele depinde de noțiunea de dreaptă. Definiția lui Legendre că „dreapta este drumul cel mai scurt între două puncte" este exprimarea unei intuiții. Că acest drum este pe plan este subînțeles, dar nu este introdus în definiție printr-un caracter specific și explicit. Există însă drumuri, cele mai scurte, și pe alte suprafețe. Acestea sînt curbele geodezice ale suprafețelor și sînt în legătură directă cu curbura suprafeței pe care se găsesc. Definind dreapta ca fiind drumul cel mai scurt între două puncte, am omis să specificăm că ea este pe plan și să o legăm de un caracter specific planului. În fond, nu am definit decît noțiunea generală de geodezică, definind dreapta ca fiind drumul cel mai scurt între două puncte; cu alte cuvinte, nu am dat

[32] Pentru dezvoltări, vezi lucrarea noastră *Mecanismul logic al matematicilor* (București, Edit. Academiei, 1968).

decît *genul*, dar nu şi *diferenţa specifică* necesară într-o astfel de definiţie. Dreapta definită de Legendre nu este decît o geodezică, în general, pe o suprafaţă oarecare. Din această cauză, postulatul dreptelor paralele nu poate fi demonstrat în geometria euclidiană, fiindcă noţiunea de geodezică nu este legată de plan, deşi există drepte în plan. Să presupunem acum că definim o dreaptă pe plan: o dreaptă este o geodezică pe o suprafaţă cu curbura lui Gauss constantă, şi anume $K = 0$ (planul). Este evident astfel că postulatul paralelelor aparţine intrinsec geometriei euclidiene şi el va fi enunţat acum astfel: *pe o suprafaţă cu curbura lui Gauss* $K = 0$, *printr-un punct exterior unei geodezice (drepte), se poate duce o paralelă la această geodezică şi numai una.*

Acelaşi lucru se poate spune în ceea ce priveşte geometria hiperbolică a lui Lobacevski-Bolyai: geodezica este, în acest caz, legată de curbura constantă $K < 0$. Postulatul paralelelor va suna astfel: printr-un punct exterior unei geodezice pe o pseudosferă (curbura constantă $K < 0$) se pot duce două geodezice paralele cu geodezica dată.

La fel pentru geometria riemanniană, realizată pe suprafeţe cu curbura constantă $K > 0$ (sfera): postulatul paralelelor va exprima *imposibilitatea de a duce printr-un punct exterior unei geodezice o geodezică paralelă.*

Prin urmare, postulatul lui Euclid, fiind definit numai prin gen, şi nu şi prin diferenţa specifică, este independent nu numai de plan, dar de orice suprafaţă.

Această întîmplare a condus la concepţia generală a independenţei axiomelor (menţionată la punctul 2), dar ea se bazează pe o neglijenţă istorică, şi nu pe un fapt real. Generalizarea, în acest sens, a independenţei axiomelor a dus la următoarele consecinţe, care au schimbat ideea de teorie ştiinţifică şi de construcţie axiomatică.

A. Considerarea axiomelor sub o formă atît de generală şi de lipsită de specificitate, încît sistemul axiomatic în întregime poate fi interpretat pe o serie indefinită de modele (adică formularea axiomelor sub forma generalităţii genului, dar nu şi a diferenţei specifice).

B. Posibilitatea de a construi pentru acelaşi model o serie indefinită de sisteme axiomatice, după cum se alege în mod arbitrar un grup de axiome sau altul.

Cu alte cuvinte, sistemul formal nu descrie schema formală specifică a modelului considerat.

XI. NONCONTRADICŢIA AXIOMELOR

Întreaga noastră analiză nu a urmărit tehnica formală a construirii axiomatice a unui sistem, ci principiul acestei axiomatizări. Din acest punct de vedere va fi privită şi condiţia de noncontradicţie a sistemului de axiome.

Într-o primă enunţare a problemei noncontradicţiei unei teorii axiomatice, aceasta sună astfel: o teorie axiomatizată nu este contradictorie dacă nu se pot deduce din axiome (şi din propoziţiile deja demonstrate) o propoziţie p şi, în acelaşi timp, şi negaţia ei non-p. Se arată că, dacă acesta ar fi cazul, atunci înăuntrul teoriei respective, în care s-ar putea deduce valabil

și p și non-p, orice propoziție formulabilă este deductibilă în sistem și nimic nu mai este fals și, prin urmare, nimic nu mai este adevărat.

Demonstrația noncontradicției unei teorii deductive este extrem de dificilă și pînă azi nu s-a demonstrat decît în cazul cîtorva teorii simple că nu sînt contradictorii, cum este, de exemplu, calculul zis propozițional.[33] În ceea ce privește aritmetica și geometria, noncontradicția lor nu a putut fi demonstrată. S-a apelat atunci la o altă noțiune, aceea de *consistență*, care să înlocuiască pe aceea de noncontradicție.[34]. Iată cum se pune problema în aceste condiții. Fie o teorie T_1, a cărei noncontradicție voim să o stabilim; să presupunem că avem cunoștință însă de o teorie T, despre care presupunem că este noncontradictorie (chiar dacă nu am demonstrat lucrul acesta); atunci, dacă putem arăta că presupunerea că T este noncontradictorie conduce la concluzia că T_1 este de asemenea noncontradictorie, T_1 se va numi *consistentă*.

Lăsînd la o parte complicațiile și dificultățile care au survenit în căutarea rezolvării problemelor de genul acesta, să ne ocupăm de sensul acestei demonstrații de „consistență".

Problema de noncontradicție a unei teorii deductive, în modul cum se pune în cercetările axiomatice actuale, este mult prea largă. De aceea ea nu poate fi rezolvată decît pentru teorii restrînse, pentru părțile unei teorii, căreia i se impun deci anumite restricții. Care este cauza acestei imposibilități?

După cum am văzut, problema independenței a fost scoasă din planul metodologic al teoriei, unde era o problemă de economie a teoriei, interpretată ca o posibilitate arbitrară de a introduce sau de a scoate o axiomă din interiorul unei teorii. Această concepție conduce însă mai departe la consecința că toate propozițiile derivate din cadrul teoriei, a căror derivare presupune axioma considerată (chiar dacă presupun și alte propoziții), pot și trebuie să fie eliminate o dată cu această axiomă. Cu alte cuvinte, o teorie T, conținînd axiomele $A_1, A_2, ..., A_n$, se desparte într-un șir de mulțimi de propoziții $M_1, M_2, ..., M_s$, juxtapuse arbitrar (fiindcă oricare mulțime $M_1, ..., M_s$ poate fi retrasă din T fără ca părțile rămase să-și deterioreze sistemul axiomatic interior). Este evident acum că problema noncontradicției unui sistem axiomatic nu se poate pune decît în modul acesta larg: o propoziție formulabilă în T_1, fie p și negația ei non-p, nu poate fi demonstrată împreună în T. Văzută în felul acesta, făcînd abstracție de caracterul ei de *dependență* față de T, propoziția p poate reprezenta orice. Să considerăm în mod schematic și formal oricare teorie T axiomatizată, și fie o propoziție p atomică (cum se zice) în această teorie, susceptibilă să ia două valori, adevărul și falsul. Dar, considerată în felul acesta, golită de conținut, propoziția p nu este legată analitic de teoria T. Altfel spus, dacă luăm în considerație, de exemplu, teoria mulțimilor și spunem că ea conține atomii $p, q, r, ...$ (susceptibili să ia două valori, adevărul și falsul), nimic nu ne indică că propoziția p nu poate lua conținutul „pămîntul este rotund". Cum, prin ce procedeu respingem din teoria axiomatizată și formalizată propoziția $p =$ „pămîntul este rotund", care nu aparține ei? Este evident că, o dată ce un asemenea conținut al propoziției p nu este expulzat și nu e cu putință să fie, numai prin mecanismul

[33] Vezi J. Herbrand, *Recherches sur la théorie de la démonstration* (Varșovia, 1930).
[34] Termenul de „consistență", ca substitut al termenului „necontradicție", apare în *Comunicarea* lui B. de Kerekjarto la „Congresul Descartes" (publicată la Paris, Ed. Hermann, 1937).

pur formal al sistemului, atunci nici propoziţia non-p nu este expulzabilă pentru acelaşi motiv. Rezultă dar că problema noncontradicţiei unui sistem este în general nerezolvabilă din cauza modului în care este pusă şi care nu corespunde construcţiei reale a unei teorii.

Într-adevăr, este uşor să ne dăm seama, şi acest lucru este mai mult decît evident pentru oricine a practicat matematica, că o propoziţie nu se găseşte în interiorul unei teorii, fie axiomă, fie teoremă, numai fiindcă nu este contradictorie cu celelalte propoziţii ale teoriei. Caracterul acesta de noncontradicţie faţă de toate celelalte propoziţii din T îi dă posibilitatea de a aparţine teoriei, dar nu o face necesară.

Orice propoziţie p a unei teorii T este noncontradictorie cu oricare din propoziţiile teoriei; această condiţie este necesară, dar nu suficientă.

Sau altfel spus: condiţia de noncontradicţie a unei propoziţii p, faţă de toate propoziţiile dintr-o teorie T, oferă o simplă posibilitate pentru p (sau non-p) de a aparţine lui T. Dar propoziţiile unei teorii T nu aparţin lui T pentru că au *posibilitatea* simplă de a-i aparţine; ele aparţin lui T în mod *necesar*.

Studiind noncontradicţia unei teorii la nivelul posibilităţii, ea a fost extinsă la o problemă foarte vastă, în care ea nici nu-şi mai păstrează caracterul ei propriu.

Acest lucru se putea vedea mai simplu, de la început, dacă ne referearn la modelul unui „sistem" axiomatizat; cum, în principiu, un sistem admite un număr indefinit de modele, o demonstraţie de necontradicţie a sistemului considerat ar însemna o demonstraţie de noncontradicţie pentru fiecare model în parte; dar nici un model nu este reprezentat în mod specific de sistem.

Se va pune chestiunea: cum s-a putut face această demonstraţie în sistemul calculului propoziţional? Am arătat în altă parte, şi nu vom reveni aici, că toate propoziţiile din sistemul propoziţional *Principia Mathematica*, de exemplu, nu exprimă nimic altceva din punct de vedere logic decît principiul terţiului exclus sau echivalentul lui formal, principiul contradicţiei. De aceea este relativ uşor de a demonstra noncontradicţia unui astfel de sistem.

XII. SUFICIENŢA AXIOMELOR

Problema suficienţei axiomelor este problema cea mai complexă a axiomaticii, iar cercetările au condus la concluzia că ea nu este rezolvabilă (în afară de cîteva cazuri simple, cum este sistemul calculului propoziţional clasic).

Problema poate fi enunţată astfel [35]: dîndu-se o formulă corect formată în cadrul unei teorii axiomatizate, să se dea un procedeu de decidere pentru demonstrabilitatea ei, adică un procedeu efectiv, prin care, fiind dată o propoziţie a sistemului, să se poată decide, într-un număr finit de paşi, dacă este demonstrabilă.

[35] Hao Wang, *A Survey of Mathematical Logic* (Pekin, 1964).

Problema aceasta a fost pusă chiar de Hilbert, dar primele rezultate au fost obținute de Herbrand.[36]

Herbrand stabilește care sînt operațiile finite și determinate pentru a verifica că o propoziție are o anumită proprietate A, în care caz ea se va numi normală. Cu alte cuvinte, pentru fiecare teorie deductivă noncontradictorie va exista o proprietate specială A a propozițiilor adevărate; dacă reușim prin operațiile indicate de Herbrand să descoperim că o propoziție are proprietatea A, urmează că-i putem fabrica o demonstrație corespunzătoare. Așadar, pentru a dovedi că o teorie este necontradictorie, vom stabili că propozițiile ei axiomatice au toate proprietatea A, după cum vom stabili că orice combinație de semne sau de propoziții conduc la propoziții care posedă aceeași proprietate A. Această metodă de recurență dă dreptul ca pentru orice propoziție a unei asemenea teorii să se poată construi o demonstrație.

Pentru aceasta trebuie însă să se găsească un asemenea procedeu.

Problema aceasta se numește, în general, problema deciderii și, după cum se vede, se pune numai în cadrul sistemelor axiomatice.

Folosind teorema zisă de necompletitudine a lui Gödel[37] sau variante ale acesteia, s-a arătat că, pentru anumite sisteme axiomatice, astfel de procedee nu pot exista. Nu vom insista asupra tehnicii acestor demonstrații, de care ne-am ocupat în altă parte.[38]

Ce spune teorema lui Gödel? Că în orice sistem axiomatic formal noncontradictoriu (care este aritmetizabil) se poate construi în mod corect o formulă care nu este decidabilă în sistem. Cu alte cuvinte, nu se poate demonstra formula în interiorul sistemului și nici nu putem afirma că nu se poate demonstra.

Făcînd abstracție de toate conexiunile acestei probleme cu problema independenței și noncontradicției unui sistem, care, așa larg cum sînt puse, duc în mod inevitabil la astfel de probleme, noi vom spune un singur lucru aici: *demonstrabilitatea unei formule nu este un caracter al formulei sau o proprietate a formulei.* Demonstrabilitatea are un caracter operațional constructiv și nu depinde numai de propoziția considerată, ci de o serie întreagă de propoziții anterioare ale teoriei respective. A pune problema în modul acesta înseamnă a o pune greșit: dacă lucrurile ar sta așa, atunci demonstrabilitatea unei propoziții în cadrul unei teorii ar consta într-un oarecare caracter A formal, al structurii formale a unei propoziții, pe care, citindu-l pe această structură, ar arăta că ea este demonstrabilă în sistem, și deci, în cazul acesta, propoziția ar fi demonstrată fără a fi demonstrată! O asemenea caracteristică poate fi găsită numai în sistemul calculului propozițional clasic, fiindcă, în acest sistem, fiecare formulă este o tautologie, adică este adevărată fără demonstrație, numai prin structura ei, care exprimă, după cum am mai spus, principiul contradicției (sau echivalentul lui formal, principiul terțiului exclus).

[36] *Ibidem*, p. 90–97.

[37] Kurt Gödel, *Ueber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, I (în „Monatshefte für Mathematik und Physik", Bd. 37, 1930).

[38] Vezi Anton Dumitriu, *Soluția paradoxelor logico-matematice* (București, Editura Științifică, 1966).

Acest caracter constructiv al demonstraţiei, care ridică un întreg edificiu propoziţional într-o teorie efectivă, a fost subliniat altă dată de un Kant, iar în timpul nostru de logicianul francez É. Goblot, care a formulat această teză în formula binecunoscută: *démontrer c'est construire.*

Am arătat mai pe larg edificiul demonstrativ pe care se bazează o propoziţie în geometrie, de exemplu, şi nu vom mai reveni aici.

Vom mai adăuga un singur lucru: dacă semnul demonstrabilităţii unei propoziţii s-ar citi direct pe o propoziţie, atunci, nedepinzînd de nici o altă propoziţie, ea nu ar avea nevoie decît de axiome pentru a fi demonstrabilă. Aceasta înseamnă însă că întreaga ierarhie a edificiului teoriei este distrusă şi întreaga teorie axiomatizată este o simplă mulţime neordonată de propoziţii.

Nu numai atît, dar, dacă caracterul demonstrabilităţii nu este pus în directă legătură cu axiomele, atunci şi acestea devin inutile, construcţia întregului sistem fiind inutilă. Ceea ce s-a întîmplat cu calculul natural al lui Jaśkowski sau Gentzen.[39]

XIII. DEMONSTRAŢIE ŞI TRANSFORMARE

Demonstraţia în sistemele axiomatice, care nu mai ţin seama de conţinutul propoziţiilor, a ajuns un simplu procedeu mecanic. Acest aspect a fost subliniat, de altfel, de cei mai autorizaţi specialişti.

Într-un articol închinat special acestei „automatizări" a proceselor de creaţie ştiinţifică, V. M. Gluşkov[40] arată că formalizările aritmetizate (de tip Gödel) permit să se descompună în componente elementare bine definite procesul demonstraţiei tuturor propoziţiilor demonstrabile în cadrul teoriei respective. Iată ce spune el textual: „Introducînd în programul unui calculator universal toate axiomele şi regulile de deducţie ale teoriei respective, precum şi formula care exprimă propoziţia de demonstrat, putem căuta un sistem de cercetare aleatorie de demonstraţie a acestei formule. Dacă numărul de paşi elementari care permit realizarea demonstraţiei formulei cerute este relativ mic, atunci viteza de lucru mai mare a calculatorului electronic permite să găsim demonstraţia prin metoda trierii simple a variantelor. Însă pentru propoziţii întrucîtva complicate, această metodă de căutare a demonstraţiei devine practic inaplicabilă, deoarece numărul de variante care trebuie triate devine monstruos de mare, aşa încît parcurgerea lor completă într-un interval de timp rezonabil este imposibilă chiar la calculatoarele rapide de astăzi."

[39] Teorema de incompletitudine a sistemelor formale axiomatice a zguduit din temelii concepţia axiomaticii formaliste. În acest sens, iată ce scrie unul dintre cei mai autorizaţi gînditori în acest domeniu: „Teorema de incompletitudine a exercitat o influenţă determinantă asupra concepţiei noastre cu privire la aşa-numitele sisteme logice şi matematice formalizate. Noi credem că în momentul de faţă aceste sisteme au numai o valoare istorică". (Andrzej Mostowski, *The Present State of Investigations on the Foundations of Mathematics*, p. 30.)

[40] V. M. Gluşkov, *Problema automatizării proceselor de creaţie ştiinţifică* (în *Logică şi filosofie*, trad. în limba română, Bucureşti, Editura politică, 1966).

Ideea predominantă în concepția axiomaticienilor actuali este însă că demonstrația este un simplu mijloc mecanic. Și această concluzie este inevitabilă, deși, după noi, inadmisibilă, fiindcă ceea ce devine mecanic nu este demonstrația, care are alt caracter, după cum am văzut, nu de construcție a unei formule ci de construcție a unui întreg edificiu de propoziții și de formule, în care formula sau propoziția considerată își află locul ei natural. Am zis că rezultatul acesta este inevitabil, deoarece la exigența de „independență" totală s-a răspuns printr-o independență arbitrară, care dă o independență față de un sistem unei întregi mulțimi de propoziții (care nu ar putea aparține sistemului, fără ca o anumită axiomă să aparțină de asemenea). La acest nivel, demonstrația s-a redus la „decidabilitate", care depinde de structura formală a formulei și deci nu de constructibilitatea ei în sistem cu ajutorul unui număr de axiome și de propoziții deja construite în sistem.

Însă într-o teorie științifică veritabilă (nu în sistemele axiomatizate arbitrar), demonstrabilitatea are ca obiect să extindă *adevărul* axiomelor la *adevărul* teoremelor. Nu este vorba de a construi din niște date admise alte concepte sau propoziții în mod corect, indiferent dacă primele sînt adevărate sau nu. Într-o teorie *adevărată* se petrece altceva decît o construcție a unei formule cu ajutorul unor convenții inițial admise. În acest sens, Aristotel a făcut o distincție netă între demonstrație și schema demonstrației. Iată ce spune el [41]: „Orice demonstrație este un silogism, dar nu oricare silogism este o demonstrație" — ἡ μὲν γὰρ ἀπόδειξις συλλογισμός τις, ὁ συλλογισμὸς δὲ οὐ πᾶς ἀπόδειξις.

Cu alte cuvinte, una este schema demonstrației și alta este demonstrația însăși. Silogismul și oricare alte scheme de demonstrație sînt simple scheme și ele nu conțin demonstrația: demonstrația conține și schema ei formală — silogismul —, dar nu este numai atît. Ce este caracteristic deci unei demonstrații ca să fie în mod real o demonstrație și să nu rămînă o simplă schemă de demonstrație? Pentru aceasta, Aristotel concepe demonstrația ca răspunzînd naturii lucrurilor. Obiectul demonstrației este deci, în concepția aristotelică, să stabilească raporturile universale și necesare ale conceptelor între ele — κατὰ παντός — καθ' αὑτό sau ᾗ αὐτό. Dar conceptul aristotelic nu se reduce la o abstracție săracă și mai ales nu se reduce la extensiunea sărăcită de conținut a generalului sau a mulțimii (clasă) cu care se intenționează să se fundeze matematicile; conceptul aristotelic este *universalul* — τὸ καθόλου, care este principiul cunoașterii și principiul existenței, materia și condiția formală a gîndirii. De aceea, pentru Stagirit, conceptul exprima ceea ce este în mod real esența și scopul, cauza formală și cauza finală; el este principiul trecerii puterii în act. Și de aceea, spune el, demonstrația ne dă adevărul, plecînd de la principii sau de la consecințele lor imediate; ea stabilește ceea ce este universal-necesar, ceea ce nu poate fi altfel [42].

Ne putem acum da seama că demonstrația în sistemele axiomatice moderne nu are nimic de-a face cu demonstrația științifică a lui Aristotel; ea s-a redus la schema demonstrației, iar „a demonstra" înseamnă „a transforma" aceste scheme într-un mod indefinit în alte scheme.

Dacă s-a reținut bine care este nivelul logic la care se construiește sistemul formal, rezultatul semnalat în ceea ce precedă nu putea fi altul.

[41] Aristotel, *Primele analitice*, I, 4.
[42] Aristotel, *Metafizica*, V, 1015 b.

XIV. CONCLUZII

Analiza modului de axiomatizare, pe care am făcut-o în ceea ce precedă, ne-a condus la precizarea cîtorva caractere ale acestei metode moderne de a construi un sistem deductiv. Delimitările trasate de examenul nostru nu trebuie înţelese în sensul lor pur negativ. Ele vor să explice numai dificultăţile întîmpinate de această metodă care, nemaiţinînd seama de construcţia reală a unei teorii deductive, o transformă într-un sistem deductiv, arbitrar creat, lipsit de orice conţinut. Este atunci evident că metoda axiomatică nu mai examinează structura conceptuală efectivă a unei teorii deductive, ci un schelet mort; mai mult încă, pluralitatea modelelor posibile ca interpretări pentru un acelaşi sistem arată că „osatura" formală exprimată de un sistem, fiind „osatura" unei serii indefinite de modele, nu aparţine esenţial nici unuia din aceste modele şi reprezintă astfel o structură atît de generală, încît nu mai are nimic specific. Este o analiză spectrală atît de nespecifică, încît ar putea fi comparată cu o cercetare anatomică care şi-ar pune probleme numai de felul acesta: ce este comun din punct de vedere anatomic între toate vieţuitoarele? ce este comun din punct de vedere anatomic între toate plantele? etc.

Asemenea probleme, fără a putea susţine că sînt eronate, sînt lipsite de orice specificitate; ele sînt definite, dacă ne putem referi la o comparaţie cu modul de definiţie clasic, numai prin genul proxim şi nu prin diferenţa specifică.

Un asemenea sistem formal este, în fond, un limbaj matematic, în care trebuie exprimat un domeniu de fapte şi propoziţii despre aceste fapte. Este un limbaj matematic în care se poate vorbi despre un domeniu special; fabricarea acestui limbaj este însă o problemă absolut independentă de domeniul la care se va putea aplica. Acesta a fost idealul axiomaticii moderne, dar, după cum s-a văzut, el ridică probleme foarte grele, de cele mai multe ori insolubile; subliniem însă că *aceste probleme nu sînt ale domeniului care va fi exprimat în limbajul axiomatic, nu sînt probleme reale, ci artificial create.*

În acest sens, A. Mostowski scrie, şi sîntem de acord cu concluzia lui [43]: „Sub influenţa lucrărilor lui Hilbert şi a ideilor filosofice ale şcolii neopozitiviste s-a imaginat, în deceniul al treilea al acestui secol, că cea mai importantă problemă a fundamentelor matematicilor este să se construiască limbaje «artificiale», cu reguli sintactice precis definite şi că printre acestea va exista un limbaj universal şi perfect care va putea fi identificat cu matematica [...]. Am insistat asupra acestor fapte, pentru a sublinia că încercarea de a stabili fundamentele matematicilor cu ajutorul unui limbaj construit, lipsit de orice interpretare (sau a «limbajului» a cărui interpretare devine posibilă numai în cursul utilizării lui) este considerată în ziua de astăzi ca un eşec complet".

Scientia, vol. 11—12, Milano, 1970.

[43] Andrzej Mostowski, *The Present State of Investigations on the Foundations of Mathematics*, p. 31.

Ştiinţa logicii

I. PROBLEMA GENERALĂ A LOGICII CA SISTEM FORMAL

De la apariţia lucrării lui Frege *Begriffschrift* (1879), logica a fost transformată într-un sistem formal sau deductiv. Un astfel de sistem este format din mai multe mulţimi: mulţimea simbolurilor primitive; mulţimea termenilor definiţi după reguli date; mulţimea expresiilor formate cu termeni primitivi şi termeni definiţi după reguli definite; mulţimea formulelor, care sînt expresii ce păstrează totdeauna o oarecare valoare; mulţimea axiomelor, care sînt o submulţime de formule; mulţimea regulilor de deducţie.

Cu ajutorul ultimelor reguli se pot deduce în mod continuu noi formule valabile în cadrul sistemului.

Desigur, noi am descris aici un sistem formal deductiv în general. Pentru ca un atare sistem să devină „logică", sau „o logică", este necesar ca el să fie *interpretat* în acest sens. Să presupunem că s-a făcut această interpretare şi că ne găsim în faţa logicii prezentată ca un sistem formal, ca o ştiinţă deductivă axiomatizată (un astfel de sistem este cel construit de Russell şi Whitehead în *Principia Mathematica*).

O primă chestiune de ordin general, care se ridică în legătură cu sistemul deductiv L, este următoarea: sistemul L este destinat să dea seamă de structura logică şi de procesul logic al tuturor sistemelor matematice posibile, T_1, T_2, T_3, ..., T_n; dacă însă orice ştiinţă deductivă (considerată sub aspectul său axiomatic, formal sau nu) are nevoie, pentru a-şi justifica logic construcţia sa matematică, de sistemul matematic al logicii L, atunci sistemul L are el singur nevoie de o asemenea justificare. Dar nu există un alt sistem care ar putea da o asemenea justificare lui L. Cu alte cuvinte, sistemul logic L trebuie să justifice oricare sistem deductiv T_1, T_2, ..., T_n, şi să-i explice structura formală; dacă însă logica L este ea însăşi un sistem deductiv, atunci care mai este sistemul care explică structura lui L? Ne găsim deci în faţa următoarei dileme: sau orice sistem formal, constituit matematic, are nevoie de o justificare logică a schemei sale formale, şi atunci logica ca sistem formal rămîne fără nici o justificare de acest gen; sau trebuie să acceptăm sistemul formal al logicii ca satisfăcîndu-se el singur, şi atunci nu se vede de ce celelalte sisteme nu au şi ele acelaşi drept. Oricum s-ar pune problema, dacă se acceptă construcţia logicii în modul cum a fost făcută de matematicienii moderni, ea pierde raţiunea însăşi în vederea căreia a fost constituită.

Din argumentarea adusă, deducem că, pentru a putea formula un sistem deductiv, avem nevoie de logică, care trebuie să-i preexiste, altfel sistemul nu poate fi constituit. Rezultă deci că logica are un caracter principial:

la ea trebuie să ne oprim şi de la ea trebuie să începem ca de la un corp de principii, şi, bazîndu-ne pe acestea, putem să construim orice altă ştiinţă, dar logica, ea însăşi, nu este o ştiinţă de acelaşi tip. Sînt matematicieni şi logicieni în epoca noastră care au sesizat „circularitatea" teoriilor logice, şi vom menţiona aici în primul rînd pe Brouwer şi Heyting. După Brouwer, matematica este partea exactă a gîndirii noastre. Prin urmare, în fiecare sector de activitate, fie ştiinţifică, fie al vieţii cotidiene, gîndirea exactă este matematică. În consecinţă, este imposibil ca matematica să nu fie implicată în filosofie sau în oricare altă ştiinţă, deoarece ea constituie gîndirea exactă şi tot ceea ce este exact în aceste discipline. Este imposibil, astfel, ca matematicile să presupună existenţa prealabilă a nici unei alte ştiinţe, nici a filosofiei şi nici chiar a logicii, întrucît acestea — în ceea ce au ele gîndire exactă — presupun matematica. Iată ce scrie Heyting în acest sens: „Ar fi un cerc vicios să se întrebuinţeze în matematici unele teorii filosofice sau logice ca mijloc de demonstraţie, întrucît formularea însăşi a unor asemenea propoziţii presupune deja noţiuni matematice constituite" [1].

În afară de această soluţie a intuiţioniştilor, vom mai cita şi concepţia lui Hilbert. Acesta a remarcat de la începutul cercetărilor sale că nu se pot reconstrui bazele matematicilor fără logică şi că nici logica nu poate fi construită fără ca ea să implice noţiuni matematice, aşa cum este, de exemplu, noţiunea de număr întreg. Din această cauză, el se decide să construiască simultan şi paralel logica şi matematica. Hilbert construieşte astfel o logică teoretică sau matematică, analoagă ca metodă cu metoda calculatorie a matematicilor, care transformă gîndirea într-un calcul algebric, sau, cum o spune el însuşi, „gîndirea logică îşi găseşte imaginea sa într-un calcul algebric".[2] Vedem dar că aceste soluţii nu sînt altceva decît un subterfugiu pentru a evita circularitatea justificării oricărei ştiinţe printr-o altă ştiinţă, astfel ca logica să fie o ştiinţă matematică înglobată în matematici. Nu vom discuta această încercare în principiul ei; vom reţine, din toată discuţia făcută, numai ideea că logica este un sistem deductiv de tipul *Principia Mathematica*.

II. CÎTEVA CONCEPŢII SEMNIFICATIVE DESPRE LOGICĂ PRIVITĂ CA ŞTIINŢĂ

1. *Concepţia lui Aristotel.* Ceea ce frapează mai întîi pe cel ce studiază opera Stagiritului este faptul că deşi acesta face o clasificare a ştiinţelor, el nu enumeră logica printre ele. El face o teorie a ştiinţei, dar nu include logica în această teorie. Mai mulţi istorici ai filosofiei au semnalat această anomalie, fără a intra însă prea profund în fondul problemei.

H. Scholz, de exemplu, explică în modul următor această omitere voită, de către Aristotel, a logicii din clasificarea ştiinţelor: „Este evident,

[1] A. Heyting, *Mathematische Grundlagenforschungen. Intuitionismus. Beweistheorie*, p. 12 (Springer, Berlin, 1934).
[2] D. Hilbert şi W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik* („Einleitung", Springer, Berlin, 1928).

pentru oricine gîndeşte asupra acestei probleme, că logica însăşi nu poate fi construită, la rîndul său, ca o ştiinţă în sensul aristotelic, deoarece nu s-ar putea vedea, în acest caz, de unde ar putea scoate ea regulile sale de operaţii, prin aplicarea cărora, asupra axiomelor date prealabil, ar deriva teoremele sale". Şi, mai departe, el adaugă: „Pînă unde a observat Aristotel, el insuşi, acest lucru nu se poate stabili astăzi".[3]

Există, totuşi, unele pasaje în textele aristotelice care ne autoriză să credem că Stagiritul cunoştea perfect acest argument. Găsim, într-adevăr, în *Metafizica* un pasaj care se referă tocmai la această problemă: „Este absurd să cauţi în acelaşi timp ştiinţa şi modul ştiinţei" [4]. Acelaşi pasaj se regăseşte, cu o uşoară diferenţă de exprimare, la Alexandru din Aphrodisia: „Este absurd să cauţi în acelaşi timp o ştiinţă determinată şi modul de a exista al ştiinţei în general" [5].

Examinînd textele citate mai sus, H. Scholz conchide că Aristotel se opune, prin această afirmaţie, celor care confundă ştiinţa cu teoria ştiinţei. „Trebuie numai cîţiva paşi încă — spunea el — pentru a ajunge de aici la teorema de nereprezentare *(Nichtdarstellbarkeit)* a logicii ca ştiinţă riguroasă *(als strenge Wissenschaft)*". Cu toate aceste remarci juste, Scholz trage concluzia, pe care chiar el a făcut-o imposibilă prin citatele date (nu se vede cum se mai poate axiomatiza logica), conchizînd: „el [Aristotel] ne-a dat, cu toate acestea, un fel de axiomatizare".[6]

Alţi istorici, ca Windelband, cred că pot explica situaţia specială a logicii, în concepţia Stagiritului, în modul următor: 1) Aristotel a vrut să constituie prin logica sa o teorie a ştiinţei; 2) din explicaţiile repetate ale lui Aristotel, rezultă că scopul logicii este exclusiv metodologic.[7]

Observaţia lui Windelband, cu toate că este exactă, nu explică în întregime poziţia Stagiritului.

Mai avem însă încă un text, acela cu care se termină *Analiticele secunde* şi care, credem noi, va arunca mai multă lumină în această problemă: principiul demonstraţiei nefiind demonstraţia, principiul ştiinţei nu este ştiinţa. Dacă în afara ştiinţei nu există nici o altă facultate de a cunoaşte adevărul, atunci, într-adevăr, intelectul activ trebuie să fie principiul ştiinţei. Astfel, intelectul activ este principiul ştiinţei şi, într-adevăr, principiul ştiinţei va fi cunoaşterea principiului" [8]. Comentînd această idee, Julius Pacius o explică astfel: *Principium scientiae est cognitio principii* („Principiul ştiinţei este cunoaşterea principiului") [9]. Pentru aceasta, orice ştiinţă are începutul ei în logică şi nu este o simplă întîmplare că primul editor al operelor lui Aristotel, Andronicos din Rhodos (sec. I, î.e.n.), pune în capul colecţiei operelor filosofice ale Stagiritului cărţile lui de logică, care mai tîrziu vor primi numele de *Organon* — instrument.

[3] H. Scholz, *Geschichte der Logik*, Junker und Dünnhaupt, Berlin, 1931, p. 5.
[4] Aristotel, *Metafizica*, II, 3, 995 a.
[5] Alexander Aphrodisiensis, *In Aristotelis Metaphysica Commentaria* (Ed. M. Hayduck, I, 1891), p. 168. (A se vedea şi H. Scholz, *op. cit.*, p. 5.)
[6] H. Scholz, *op. cit.*, p. 6.
[7] W. Windelband, *Geschichte der Philosophie* p. 110 (herausgegeben von Heimsoeth, Tübingen, 1935).
[8] *Analiticele secunde*, II, 19, 100 a.
[9] Julius Pacius, *Aristotelis Peripateticorum Principis Organum*, p. 546 (Editio Secunda, Francofurti, 1597; reproducere fotographică, Georg Olms, Hildesheim, 1967).

Logica are, desigur, și un aspect metodologic, și din acest punct de vedere Windelband are dreptate, dar ea nu este numai o metodologie generală. Un motiv de ordin pur rațional — pentru a scăpa de cercul vicios semnalat — a determinat pe Aristotel de a face, din logică, în primul rînd o cunoaștere de principii. Esența logicii este de natură noetică și ea este direct legată de intelectul activ.

Caracterul de principiu al logicii în raport cu celelalte științe a fost subliniat de comentatori, chiar dacă argumentele lor variază în timp.

Alexandru din Aphrodisia, de exemplu, ne spune că înșiși cei vechi (peripateticienii din școala lui Aristotel) înțelegeau logica ca un instrument și nu ca o parte a filosofiei.[10]

Augustin vorbește despre logică ca de o *disciplina disciplinarum* ... „aceea care se cheamă disciplina disciplinelor ne învață să învățăm; ea ne învață să învățăm pe alții; în ea se arată și se descoperă rațiunea" [11].

Boețiu pleacă tot de la această idee; pentru el „arta pe care grecii o numesc λογική și pe care noi o putem numi rațională [...] este instrumentul" [12].

Prantl ne spune și el, de altfel, că întreaga masă de comentatori concep logica ca un instrument: „În ceea ce privește în primul rînd concepția logicii în general și locul său, este unanim recunoscut, ca de la sine înțeles, că este prima dintre disciplinele filosofice și că are valoare ca instrument de cunoaștere între adevăr și fals, și servește, prin această trăsătură fundamentală, ca sprijin pentru tot ce urmează" [13].

În rezumat, cu toată absența de texte, se poate conchide că pentru Aristotel logica nu era o știință deductivă, ci o știință a deducției; ea nu e o știință, în acest sens, ci o știință a științelor prin însăși natura ei.

2. *Modus scientiarum al logicienilor scolastici.* Numărul relativ modest de texte vechi, care au parvenit la noi, nu ne permite să avem un stoc mai mare de argumente și de explicații asupra concepției celor antici despre logică. Totuși, această problemă trebuie să fi făcut obiectul unor lungi dezbateri, căci Albertus Magnus (1193—1280) ne spune: *Quidam enim antiquorum logicam nullam esse scientiam contenderunt, dicentes non posse esse scientiam id quod est omnis scientiae sive doctrinae modus* („Într-adevăr, unii dintre cei vechi susțineau că logica nici nu este o știință, spunînd că nu poate să fie o știință ceea ce este modul oricărei științe sau doctrine").[14] Mai departe, el adaugă: *Etiam Aristoteles dicit quod modus sciendi ante scientiam quam libet discendus est* („Și chiar Aristotel zice că modul științei trebuie învățat înaintea oricărei științe").

Noi ne vom opri însă la argumentul de ordin pur logic adus de Albertus Magnus, argument care aparține tradiției, așa cum rezultă din enunț: *Addunt etiam quod nullius rei modus cum re, cuius modus est, venit in sui divisionem* („Se mai adaugă că modul nici unui lucru nu se poate găsi în diviziunea genului său cu lucrul al cărui mod el este"). Argumentrul scolastic

[10] Alexandru din Aphrodisia, *Ad Annalytica Priora Commentarium*, f. 2 b.
[11] Augustin, *De ordine*, II, 13, 38.
[12] Boețiu, *Comentariu la Topica lui Cicero.*
[13] C. Prantl, *Geschichte der Logik im Abendlande*, I, p. 644 (reproducere Manuldruck, Leipzig, 1927).
[14] Albertus Magnus, *De praedicabilibus*, I, c, 1.

era deci identic cu acela al lui Aristotel și se reducea la următoarea imposibilitate logică: logica fiind știința științelor, nu poate fi una din științe, întrucît în acest caz ea ar fi în același timp gen și una din speciile genului.

Trebuie să reținem și faptul că sensul cuvîntului *modus* este: „mod", „manieră", „procedeu", „principiu". Logica este, prin urmare, principiul tuturor celorlalte științe, dar ea nu este propriul ei principiu; ea este procedeul (sau instrumentul) tuturor științelor, dar nu este propriul ei procedeu; de aceea ea nu este o știință, ci modul de a proceda — *modus procedendi* — în celelalte științe.

Explicațiile suplimentare date de Albertus Magnus, care aparțineau de altfel și celor vechi, după cum rezultă din chiar felul cum sînt exprimate, contribuie la a pune în evidență și alte aspecte ale argumentării prin care se arăta că logica este un *modus scientiarum*. În adevăr, Albertus Magnus ne spune că logica nu poate fi o parte a filosofiei, pentru că aceasta se divide în trei părți, printre care logica nu-și găsește locul [15]: *Hanc autem scientiam, quae modus est omnis philosophiae, quidam nullam partem esse philosophiae contendunt dicentes, non nisi tres partes philosophiae, sc. physicam, mathematicam sive disciplinabilem, et metaphysicam sive divinam*: „Se contestă că această știință, care este modul întregii filosofii, ar fi o parte a filosofiei, afirmîndu-se că nu există decît trei părți ale filosofiei, anume fizica, matematica sau știința sistematică *(disciplinabilem)*, și metafizica sau știința divină". El indică și sursele acestei diviziuni ca fiind în filosofia peripatetică și în aceea a filosofului arab Avicenna: *Avicenna dicens res omnes tripliciter esse accipiendas* („Avicenna spune că toate lucrurile [filosofiei] trebuie acceptate într-un mod triplu").

Mai sînt și alte aspecte sub care analizează Albertus Magnus conceptul de logică. Iată ce scrie el, în altă parte: „Există științe pe care noi nu le studiem pentru ele însele, ci pentru că ne sprijinim pe ele, așa cum sînt știința problemelor topice și știința instrumentului științelor, care este silogismul și, într-un fel general, științele sermocinale (discursive); și acestea nu sînt adevărate științe, ci modul tuturor științelor" [16].

Considerînd problema în aspectul ei „sermocinal" (discursiv), logica nu poate să se găsească, nici din acest punct de vedere, printre științe. Filosofia se divide în trei părți esențiale [17]: *Tres sunt partes essentiales philosophiae realis, quae non causatur in nobis ab opere nostro, sicut causatur scientia moralis, sed potius ipsa causatur ab opere naturae in nobis; quae partes sunt: naturalis, et metaphysica, et mathematica* („Trei sînt părțile esențiale ale filosofiei reale, care nu au cauza în noi, prin activitatea noastră, cum are cauza sa știința morală, ci mai curînd au cauza lor prin activitatea naturii asupra noastră; și aceste părți sînt: [știința] naturală, metafizica și matematica").

Clasificarea științelor este, pentru Albertus Magnus [18], cea clasică și ea poate fi găsită în toate tratatele epocii:

I. *Științele reale* care se ocupă de *ente* (de existent): fizica, metafizica, matematica.

[15] Albertus Magnus, *De praedicabilibus*, I, *De natura logicae*.
[16] Albertus Magnus, *Metafizica*, I, I, 1; *De anima*, I.
[17] Albertus Magnus, *Fizica*, I, 1.
[18] Albertus Magnus, *Fizica*, I, 1.

II. *Științele morale.*
III. *Științele sermocinale: grammatica — quae docet recte loqui; rhetorica — quae docet ornate loqui; logica — quae docet vere loqui.*

După cum se vede, în această accepțiune de știință sermocinală, adică de știință discursivă, logica se referă la expresiile „adevărate", pentru că ea ne învață *vere loqui* — să vorbim „adevărat". Celelalte științe sermocinale au alte scopuri: gramatica ne învață *recte loqui* — să vorbim corect; retorica ne învață *ornate loqui* — să vorbim „cu eleganță". Științele sermocinale nu se ocupă deci de *ente* și pentru aceasta ele nu formează o parte esențială a filosofiei, căci logica ne învață mai ales „modul de a ști", *modus sciendi*, și nu este deci o știință particulară.

Această concepție generală despre logică a fost adoptată de către toți logicienii scolastici, fără excepții; ea capătă însă unele preciziuni originale la Duns Scotus. Celebrul *doctor subtilis* imparte logica în două părți (influențat de Alfarabi):

1) *logica docens*—care învață, fiind cu adevărat o știință, căci ne învață silogismul, argumentarea;

2) *logica utens* — care este folosită —, nefiind astfel o știință propriu-zisă, ci o știință practică.

Ideea că logica este o știință practică (și nu speculativă) apare în operele lui Roger Bacon, Johannes Gratiadei de Ascoli, Petrus Aureolus, Aegidius Romanus ș.a., dar ia o formă mai definită la Ockam.

După cum se vede, ideea că logica nu este o știință, adică o știință deductivă în sensul axiomaticii aristotelice, formează punctul de vedere general al acestor logicieni, chiar dacă această concepție este susținută cu argumente diferite, pentru a pune în evidență diverse aspecte ale logicii (cum este aspectul sermocinal).

În rezumat, putem conchide, o dată cu Albertus Magnus, că logica ne învață principiile — *logica docet principia* — și, pentru aceasta, ea nu poate să fie o știință de aceeași natură, de exemplu, cu geometria.

În logica celor vechi și a scolasticilor se găsesc principiile cele mai generale ale tuturor științelor. În ceea ce privește deducția, în logică se găsesc principiile în virtutea cărora se pot trage consecințe în toate științele; ea enunță principiile deducției, dar nu este și o știință deductivă.

3. *Concepția lui Wittgenstein.* În zilele noastre, transformarea logicii într-o teorie deductivă a fost analizată, deși într-un mod lapidar, de către Ludwig Wittgenstein, în lucrarea sa *Tractatus logico-philosophicus*. Ideile lui sînt o contribuție la elucidarea acestei probleme; el se menține, în această chestiune, pe firul gîndirii lui Aristotel. Într-adevăr, Wittgenstein ne spune: „Logica nu este o teorie, ci un reflex al lumii" *(Die Logik ist keine Lehre, sondern ein Spiegelbild der Welt).*[19] Cu alte cuvinte, logica nu exprimă convenții, ci structuri ale realității, și este astfel *das Gerüst der Welt* — „osatura lumii".

Dar să scrutăm mai de aproape gîndirea lui Wittgenstein.

Propozițiile logice sînt, toate, tautologii. O tautologie este justificată ca atare de structura sa interioară și nu prin demonstrația sa. Pentru aceasta

[19] L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus* (prop. 6.13) (Paul Kegan, Londra 1933).

Wittgenstein spune că logica poate fi totdeauna astfel concepută ca fiecare din propoziţiile sale să fie considerată ca fiind propria sa dovadă.[20] Din acest moment, separarea corpului propoziţiilor unei teorii matematice de cele ale logicii, în axiome şi teoreme, este arbitrară. Nu există propoziţii care să fie esenţial primitive şi altele care să fie esenţial deductibile din primele. Fiecare tautologie arată, prin ea însăşi, că este o tautologie.[21] Demonstraţia propoziţiilor logice — scrie Wittgenstein — constă în faptul că noi le facem să apară ca şi cum ele ar fi create plecînd de la alte propoziţii logice şi aplicînd în mod succesiv unele operaţii care generează, la rîndul lor, alte tautologii (într-adevăr, dintr-o tautologie urmează numai o tautologie). Desigur, acest mod de a arăta că propoziţiile logice sînt tautologii este în întregime neesenţial pentru logică, deoarece propoziţiile de la care ea porneşte trebuie să arate, fără demonstraţie, că ele sînt tautologii.[22] În logică, procesul şi rezultatul sînt acelaşi lucru. Demonstraţia in logică este numai un mijloc mecanic pentru a arăta mai uşor tautologia, cînd ea este mai complicată.[23] Ar fi cu adevărat remarcabil — spune el — dacă cineva ar putea demonstra, în mod logic, o propoziţie semnificativă şi tot aşa o propoziţie logică printr-o propoziţie semnificativă. Este clar că demonstraţia logică a unei propoziţii semnificative şi demonstraţia în logică sînt două lucruri diferite.[24]

Vom sublinia însă, acum, cea mai importantă concluzie a lui, trasă din consideraţiile precedente: „Propoziţia semnificativă exprimă ceva şi demonstraţia arată că este aşa; *în logică, orice propoziţie este forma unei demonstraţii*" [25].

Vedem dar că sistemul logicii formale, de exemplu, acela din *Principia Mathematica*, nu este *o teorie*, în concepţia lui Wittgenstein, şi din acest punct de vedere el este de acord cu Aristotel; dar el mai este de acord sub un alt aspect al logicii şi cu logicienii scolastici, şi anume că teoremele logicii sînt numai reguli de deducţie. În consecinţă, logica este, pentru el, de asemenea, o *ars procedendi* şi nu o ştiinţă, ci un *modus scientiarum*.

4. *Concepţia lui F. Waismann.* F. Waismann a dezvoltat concepţia lui Wittgenstein asupra logicii, într-un studiu purtind titlul semnificativ: *Ist die Logik eine deduktive Theorie?* [26] El remarcă aici că s-a constatat de mult timp caracterul tautologic al logicii, construită ca sistem formal, şi vrea să dea o interpretare a propoziţiilor logicii care să fie acceptabilă, deoarece *această circumstanţă* (caracterul tautologic) nu este, după el, *caracterizantă pentru propoziţiile logice.* Waismann are în vedere sistemul din *Principia Mathematica*, dar observaţiile sale se aplică la toate sistemele. Construcţia acestui sistem este cunoscută: punctul de plecare îl constituie ideile primitive şi unele formule tautologice (axiomele), care sînt nedemonstrate; din aceste propoziţii fundamentale se pot deriva alte propoziţii, conform indicaţiilor complementare determinate. Calculul logic se prezintă

[20] *Op. cit.* (prop. 6.1265).
[21] *Op. cit.* (prop. 6.127).
[22] *Op. cit.* (prop. 6.127).
[23] *Op. cit.* (prop. 6.1262).
[24] *Op. cit.* (prop. 6. 1262)
[25] *Op. cit.* (prop. 6.1264).
[26] *Erkenntnis*, Bd. 7, H. 4, 1938. Waismann declară, chiar el, că ideile expuse în acest studiu sînt datorate unor comunicări orale pe care i le-a făcut L. Wittgenstein (a se vedea nota respectivă din *Erkenntnis*, Bd. 7, H. 5/6, p. 375, Haga, 1939).

astfel sub forma unei teorii deductive, ale cărei propoziții sînt înlănțuite prin demonstrații, și amintește, în acest fel, alte sisteme deductive, ca de exemplu mecanica sau geometria. Dar această comparație este înșelătoare într-un punct decisiv — spune Waismann — și de fapt ne-a și indus în eroare [27]; ea ne face să credem că și calculul logic este o teorie care ar ajunge pornind de la unele propoziții adevărate date, la alte propoziții adevărate. Logica ar fi astfel o construcție de propozițiuni — *ein Gebäude von Sätzen.*[28]

Să insistăm, o dată cu Waismann, asupra concepției obișnuite a sistemului de logică. Ideea lui Frege și cea a lui Russell, creînd *Principia Mathematica,* era următoarea: axiomele logicii sînt adevăruri care se impun cu necesitate spiritului nostru și adevărul celorlalte propoziții este recunoscut de îndată ce printr-un lanț de demonstrații ele sînt reduse la primele. „Acești cercetători — scrie Waismann — erau deci de părere că prin cercetările consecințelor vor putea pătrunde totdeauna mai adînc într-un domeniu de adevăruri eterne. Această concepție nu atinge fondul problemei." Într-adevăr, spune Waismann, logica servește să dea regulilor de deducție o formă sistematică. Aceste reguli justifică deducția. Aceasta înseamnă că putem spune: „această concluzie este justă, pentru că am scos-o după cutare sau cutare regulă". Din contra, nu putem spune: „această concluzie este justă, pentru că cutare sau cutare propoziție este adevărată". *„Dacă logica ar fi un sistem deductiv* — scrie autorul citat — *ca mecanica, atunci axiomele sale nu ne-ar interesa deloc în realitate, ci numai faptul că din axiome rezultă restul teoriei.* Atunci logica lui Russell nu ar fi logica, ci un exemplu de logică." Russell voia, din contra, să stabilească legi sigure care să justifice deducția, și nu numai deducția plecînd de la principii, ci deducția în general. „Trebuie deci conchis — după Waismann — că logica nu este o construcție de adevăruri, ci numai expresia unor reguli de deducție și că edificiul întreg al sistemului de formule este subordonat acestui scop." [29] Examinind mai de aproape unele teoreme din *Principia Mathematica,* el conchide că teoremele nu sînt decît părțile unor reguli de deducție.

În final, Waismann ajunge la următoarele concluzii.

Termenul „logică" poate fi utilizat într-un sens mai general, cum ar fi desemnarea tuturor sistemelor izomorfe sistemului lui Russell și Whitehead. În ceea ce privește sensul mai restrîns — teoria deducției —, n-ar trebui să se deosebească de sistemul construit formal și acesta este sensul caracteristic din punct de vedere logic în *logica — sistem formal.* Acest moment se găsește în modul particular al aplicării calculului logic.[30]

Ajungînd la aceste concluzii, Waismann se întreabă dacă o logică „non-aristotelică" este posibilă (după Łukasiewicz o astfel de logică ar trebui să fie numită „nonchrysippiană"). La această chestiune Waismann crede că se va putea răspunde numai atunci cînd se va stabili mai întîi cu exactitate modul de aplicare a logicii noastre, și apoi se va putea căuta să se inventeze un sistem cu o structură deosebită și mai îndepărtată de logica clasică.

[27] *Op. cit.,* p. 274.

[28] *Op. cit.,* p. 275.

[29] *Op. cit.,* p. 275. Iată textual ce scrie Waismann: *Die Logik ist kein Gebäude von Wahrheiten, sondern nur der Ausdruck einer Schlussregel ist.*

[30] *Op. cit.,* p. 280.

III. CONCLUZII

Teoremele logicii reprezintă reguli de deducţie

Observaţiile lui Waismann, bazate pe acelea ale lui Wittgenstein, sînt de cea mai mare importanţă pentru a înţelege că logica nu este o teorie, ci numai o colecţie de reguli de deducţie. Desigur, acest lucru este astăzi cunoscut, dar nu i se dă semnificaţia lui reală. Într-adevăr, dintotdeauna s-a confundat adevărul logic cu regula de deducţie, iar tautologiile sistemelor logice au fost considerate cînd ca adevăruri, cînd ca reguli de deducţie. Pentru logicienii formalişti, teoremele logicii reprezintă pe de o parte legi logice, şi deci adevăruri logice, pe de altă parte, aceleaşi legi logice servesc tot timpul pentru demonstrarea altor adevăruri logice (ele sînt astfel reguli de deducţie). Care este dar statutul lor efectiv?

În *Principia Mathematica,* Russell numeşte, el însuşi, întregul sistem al calculului propoziţional *The theory of deduction,* iar cînd introduce variabilele aparente, el ne spune că face „o extindere a teoriei deducţiei". Este interesant de subliniat că unele teoreme ale calculului propoziţional sînt numite de Russell: *principiul tautologiei*; *principiul reductio ad absurdum*; *principiul permutării*; *principiul silogismului*; *principiul transpoziţiei* etc. Dacă el n-a numit toate teoremele calculului propoziţional „principii" speciale, aceasta se datoreşte faptului că i-ar fi trebuit un număr prea mare de denumiri şi ar fi trebuit să invente o terminologie prea lungă şi nouă. Aceasta arată că, chiar pentru Russell, teoremele calculului propoziţional nu erau adevăruri demonstrate, ca în geometrie sau în mecanică, ci reguli de deducţie, deşi el n-a enunţat în mod precis această caracteristică a propoziţiilor acestui sistem, ceea ce a putut face să se creadă, aşa de mult timp, că teoremele sistemelor formale, în general, reprezintă adevăruri logice.

Alţi logicieni[31] au dat numele de *„legi"* teoremelor calculului propoziţional, ceea ce arată de asemenea că şi ei au observat că aceste teoreme nu au aceeaşi natură cu teoremele de geometrie (de exemplu), unde nimeni nu ar putea afirma că o teoremă este „o lege", sau „principiu". Ce curios ni s-ar părea, într-adevăr, dacă cineva ar numi teorema lui Pitagora: „legea sau principiul lui Pitagora"!

H. Reichenbach[32] numeşte teoremele logicii „reguli"; Hilbert şi Ackermann[33] le numesc „formule adevărate"; în sfîrşit, mai răspîndit este numele de „tautologii", dat de Wittgenstein.

Logica nu are axiome şi nici teoreme

Am arătat motivele de principiu pentru care logica nu poate fi o teorie. În acest caz, ea nu poate avea nici axiome, nici teoreme.

Dacă examinăm sistemul logico-formal din *Principia Mathematica,* de exemplu, observăm că axiomele nu au nici un drept de prioritate în raport

[31] De exemplu: Alonzo Church, în *Introduction to Mathematical Logic* (Princeton, New Jersey, 1956).
[32] H. Reichenbach, *Symbolic Logic* (New York, 1948).
[33] D. Hilbert şi W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik.*

cu alte tautologii ale sistemului. Aceste tautologii nu sînt principii, în sensul etimologic al cuvîntului, dar ele sînt acceptate în mod convențional ca principii, și prin aceasta se imită construcția unei teorii deductive reale. Dacă acceptăm ansamblul tautologiilor alese, prin convenție, ca axiome (și noi putem să le adoptăm ca axiome tocmai pentru că ele sînt tautologii), atunci am acceptat, *ipso facto*, toate tautologiile posibile care pot fi construite în cadrul sistemului (cunoscute sau necunoscute), pentru că ele au toate același drept de cetate în sistem, ca și axiomele; ele sînt tautologii.

Dispoziția sistemului formal al logicii în ansamblu axiomatic și în ansamblu de teoreme este cu totul convențională și lipsită de orice rațiune teoretică, și pentru aceasta orice construcție de acest fel este relativă și modificabilă, ceea ce n-ar fi cazul dacă ea ar avea o rațiune teoretică. Logica devine, astfel, afirmarea simultană a tuturor tautologiilor posibile, formulabile în sistem. În logica formalizată nu există o dependență logică între propoziții, nici anterioritate, nici posterioritate.

Să considerăm șirul tuturor tautologiilor posibile în sistemul *Principia Mathematica*:

$T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n, \ldots$

Ele au toate valoarea „adevărat", deci se poate face asertarea conjuncției lor:

(1) $\vdash \cdot T_1 \,\&\, T_2 \,\&\, T_3 \,\&\, \cdots \,\&\, T_n \cdots$

Se mai poate încă afirma echivalența lor logică:

(2) $\vdash \cdot T_1 \equiv T_2 \equiv T_3 \equiv \ldots \equiv T_n \equiv \ldots$

Sistemul întreg de „adevăruri" logice se reduce la conjuncția (1) sau la șirul echivalențelor (2).

Construcția sistemului logico-formal are o singură valoare: *de ordin practic și metodologic*. Într-adevăr, nu ne putem imagina, de la început, toate tautologiile posibile, sau să știm, fără nici un control, dacă o formulă dată este o tautologie sau nu. Desigur, avem posibilitatea să constatăm că ea este o tautologie, construindu-i matricea, dar uneori este mai ușor de a proba acest caracter printr-o „deducție". Regulile deducției devin astfel reguli practice. Așa cum spunea Wittgenstein, și cum noi am subliniat în cursul expunerii, regulile de deducție în sistemul formal al logicii sînt numai mijloace mecanice pentru a recunoaște tautologia, cînd construcția sa este mai complicată. Această semnificație a tautologiilor sistemului formal al logicii reiese din faptul că formalismul logic clasic a putut fi prezentat prin tehnici diferite. Într-adevăr, formalismul logicii clasice poate fi construit nu numai prin metoda axiomatică, ci și prin alte metode. Se pot distinge, în general, trei tehnici formale: metoda axiomatică; logica cu scheme; logica combinatorie.

Metoda axiomatică a sistemului formal al logicii a fost utilizată de către Frege, și după el de către Whitehead și Russell. Logica cu scheme a fost prezentată de către S. Jaśkowski[34] și după el, independent, de către G. Gentzen[35], ca o metodă de „deducție naturală" (1934). Logicile combinatorii,

[34] Stanislas Jaśkowski, *On the Rules of Supposition in Formal Logic* („Studia Logica", Varșovia, 1934).

[35] Gerhard Gentzen, *Untersuchungen über das logische Schliessen* („Mathematische Zeitschrift", 1934).

prezentate ca studiul operaţiilor, ce ar putea fi făcute cu expresii simbolice, s-au dezvoltat plecînd de la lucrările lui H. B. Curry.[36]

G. Gentzen nu utilizează axiome, ci numai reguli de derivare, care sînt exprimate prin secvenţe. Regulile de derivare devin astfel scheme de demonstraţie cu ajutorul cărora, în cursul demonstraţiei, se fac transformările secvenţelor. Cu alte cuvinte, sistemul formal axiomatic este în întregime tradus în logica cu scheme ale lui Gentzen, printr-o teorie a demonstraţiei. Avantajul acestei tehnici formale este că nu mai prezintă logica drept o teorie axiomatică analogă geometriei sau mecanicii, ci drept ceea ce este în realitate: o colecţie de reguli de deducţie. Astfel, logica lui Gentzen corespunde mai natural procesului deductiv, fapt remarcat nu numai de autor, care i-a dat numele de „deducţie naturală", dar şi de mulţi alţi logicieni. Iată, de exemplu, ce scriu în acest sens W. şi M. Kneale: „Apare clar că Gentzen a prezentat logica într-un mod mai natural decît Frege, Whitehead şi Russell. Dacă admitem că numărul regulilor lui este mult mai mare decît numărul regulilor şi axiomelor din *Principia Mathematica*, la el fiecare semn este introdus în mod separat şi se poate proba că echivalenţele care se găsesc în *Principia Mathematica* sînt definiţii ale semnelor neluate ca primitive".[37]

Logica utens

În sfîrşit, vom sublinia, încă o dată, că sistemul formal al logicii are o valoare indiscutabilă de ordin metodologic, şi prin aceasta practic, caracter care a fost pus în evidenţă, pentru logică în general, de logicienii Evului Mediu şi în special de Duns Scotus, după cum am arătat mai sus.[38] Organizarea schemelor deductive într-un mod sistematic ne dă posibilitatea unor explicitări riguroase ale demersurilor demonstrative, aşa că logica, devenind un sistem formal, devine o *logica utens*.

Notre Dame Journal of Formal Logic, 4, Notre Dame, U.S.A., 1971.

[36] H. B. Curry, *Grundlagen der kombinatorischen Logik* („American Journal of Mathematics", 1930). Curry şi-a dezvoltat concepţia sa în multe alte lucrări ulterioare.

[37] William şi Martha Kneale, *The Development of Logic*, p. 539 (Oxford, 1962).

[38] Este de la sine înţeles că sistemul pur formal din *Principia Mathematica*, precum şi sistemele echivalente, nu fac obiectul analizei dezvoltate în studiul nostru, ci *numai sistemul formal interpretat ca „sistem logic"*.

Metoda descinderii infinite

I. ISTORIC

Marele matematician francez Pierre de Fermat (1601—1665), căruia i se datoresc o serie de teoreme excepţionale din teoria numerelor (el este şi un precusor al calculului diferenţial), ne-a lăsat o metodă de demonstraţie, zisă *„metoda descinderii infinite"*, care pare o cale cu totul originală, deşi avînd un caracter puţin bizar, cu ajutorul căreia se pot dovedi unele rezultate matematice într-un mod indirect.

Din nefericire, nu posedăm o expunere completă a acestei metode datorită lui Fermat însuşi. În timpul vieţii, el nu a publicat decît un opuscul cuprinzînd o disertaţie geometrică (1660), care a apărut de altfel anonim. Descoperirile lui se găsesc în note marginalii la cărţile studiate de el şi în vasta corespondenţă pe care a avut-o cu cei mai mari savanţi ai timpului. Legendre, în „Prefaţa" la *Théorie des nombres* (1823), subliniază această situaţie, care poate apărea curioasă astăzi, în care s-a aflat opera ştiinţifică a lui Fermat aşa cum a lăsat-o el: „El a lăsat aproape toate teoremele sale fără demonstraţie. Era în spiritul timpului ca oamenii de ştiinţă să-şi propună unii altora probleme. Fiecare îşi ascundea cel mai adesea metoda pentru a-şi rezerva triumfuri noi pentru sine, cît şi pentru naţiunea sa; fiindcă exista pe atunci o rivalitate mai ales între geometrii francezi şi cei englezi. De aici a urmat faptul că cele mai multe din demonstraţiile lui Fermat s-au pierdut."

O serie de observaţii marginalii la celebra *Aritmetică* a lui Diophante (sec. IV e.n.) ne pot da o indicaţie asupra importanţei pe care o acorda însuşi Fermat metodei descinderii infinite.

Aritmetica lui Diophante din Alexandria a intrat în circuitul ştiinţei europene abia în secolul al XV-lea. O traducere latină a acestei lucrări a apărut in 1676 datorită lui Holzmann. Bachet de Méziriac [1] a publicat o a doua traducere în limba latină (1626), pe care a însoţit-o de un *Commentarium*. Pe unul din aceste exemplare ale versiunii latine a *Aritmeticii lui Diophante*, Fermat a făcut o serie de însemnări de o importanţă ştiinţifică excepţională.

În 1679, fiul său, Samuel de Fermat, a publicat la Toulouse toate „memoriile" tatălui său sub titlul *Opera varia*.

În 1670, Samuel de Fermat publică o ediţie a *Aritmeticii* lui Diophante sub titlul: *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex et de numeris*

[1] Bachet de Méziriac s-a ocupat de rezolvarea în numere întregi a ecuaţiilor nedeterminate şi a dat soluţia ecuaţiei diophantiene de gradul I.

multangulis liber unus Commentariis C. G. Bacheti et Observationibus D. P. de Fermat, Senatoris Tolosani.

După cum se vede din titlu, lucrarea aceasta conținea și „Observațiile" senatorului de Toulouse, P. de Fermat. Într-adevăr, in cartea publicată de Samuel de Fermat se găsește un tratat redactat de Billy, sub titlul *Inventum novum,* care conține observațiile lui Fermat, analizate și dezvoltate.

După aceasta, lucrările asupra operei lui Fermat, mai mult sau mai puțin dezvoltate, au început să se înmulțească.

Posedăm un *Précis des Oeuvres mathématiques de Fermat et de l'Arithmétique de Diophante,* publicat de E. Brassine (Toulouse, 1853).

În sfîrșit, în 1891, Paul Tannery și Charles Henry au publicat operele complete ale lui Fermat, sub titlul *Oeuvres de Fermat* în 4 volume. Primul volum cuprinde opera matematică în limba latină și observațiile marginalii la *Arithmetica* lui Diophante. Volumele al II-lea și al III-lea conțin corespondența lui Fermat în limba franceză. Volumul al IV-lea conține un supliment de corespondență și alte documente asupra manuscriselor lui Fermat.

Din aceste lucrări putem desprinde ce este metoda nouă, a descinderii infinite, pe care Fermat o socotea ca un veritabil progres în arta demonstrației.

II. DESCINDEREA INFINITĂ

Iată acum textele rămase de la Fermat asupra acestei metode, metodă de care el era extrem de încîntat.

La finele cărții a VI-a a *Aritmeticii* lui Diophante, Bachet de Méziriac, editorul acestei lucrări în limba latină, de care am vorbit, a citat o serie de probleme. La problema numerotată nr. 20, Fermat face următoarea observație:

„Aria unui triunghi dreptunghi, exprimată în numere întregi, nu poate fi egală cu aria unui pătrat. Vom da aici demonstrația acestei teoreme, inventată de noi, pe care am descoperit-o după o meditație laborioasă și grea. Acest gen de demonstrație va provoca un progres minunat în problemele aritmetice."

Într-o scrisoare adresată de Fermat lui Carcavi (1659), citim [2]:

„Și pentru că metodele care se găsesc în cărți erau insuficiente pentru a demonstra propoziții atît de dificile, am găsit, în sfîrșit, o cale cu totul specială pentru a reuși. Am numit acest mod de a demonstra *descinderea infinită,* și m-am servit de ea la început pentru a demonstra propozițiile negative, ca, de exemplu, că nu există un număr mai mic decît unitatea, că nu există un multiplu de trei care să fie compus dintr-un pătrat și triplul altui pătrat, că nu există nici un triunghi dreptunghi, exprimat în numere întregi, a cărui arie să fie un pătrat.

Dovada (ultimei afirmații) se face prin ἀπαγωγήν εἰς ἀδύνατον (reducerea la absurd) în felul acesta: „Dacă ar exista un triunghi în numere întregi care să aibă aria egală cu a unui pătrat, ar exista un alt triunghi mai mic

[2] P. Tannery, *op. cit.*, II, p. 43.

decît acela dat, care ar avea aceeași proprietate. Dacă ar exista un al doilea, mai mic decît primul, care să aibă aceeași proprietate, ar exista, printr-un raționament identic, un al treilea, mai mic decît cel de-al doilea, care ar avea aceeași proprietate și, în fine, un al patrulea, un al cincilea și așa mai departe coborînd la infinit. Dar fapt este că fiind dat un număr întreg, nu există o serie infinită de numere întregi, coborînd de la el, mai mici decît acesta. De unde conchidem că este deci imposibil să existe un triunghi dreptunghi a cărui arie să fie un pătrat.

Nu adaug motivul pe baza căruia inferez că, dacă ar exista un triunghi dreptunghi de această natură, ar exista un altul de aceeași natură mai mic decît primul, pentru că expunerea ar fi prea lungă și pentru că în aceasta constă secretul întregii mele metode. Mi-ar părea bine dacă savanți ca Pascal și Roberval sau alții ar căuta acest motiv după indicațiile mele."

După cum se vede, Fermat oprește explicațiile date tocmai la ceea ce este esențial și care constituie *„tout le mystère de ma méthode"*. El arată, în ceea ce precedă, cum s-ar explica metoda „descinderii" la demonstrațiile apagogice, adică *ad absurdum*, care se aplică la dovedirea propozițiilor negative. Totuși, în același loc, în continuare, el vorbește și de aplicarea metodei „descinderii infinite" la propozițiile afirmative. Iată, într-adevăr, ce scrie el: „N-am putut mult timp să aplic metoda mea la propozițiile afirmative, deoarece pentru a ajunge la aceasta trebuie să faci un ocol și o deviere mult mai dificilă. Astfel că, atunci cînd a trebuit să dovedesc că orice număr prim care întrece cu o unitate un multiplu de 4 este compus din două pătrate, m-am găsit într-o dificultate serioasă. Dar principii noi mi-au permis să ajung la această demonstrație. Raționamentul meu asupra chestiunilor afirmative este următorul: dacă un astfel de număr, luat arbitrar, nu este compus din două pătrate, atunci ar exista un număr de aceeași natură mai mic decît cel dat și apoi un al treilea încă și mai mic etc., coborînd la infinit pînă cînd se ajunge la 5, care este cel mai mic, care ar urma să nu fie compus din două pătrate, și care este totuși (compus din două pătrate), de unde trebuie să inferăm, prin reducere la imposibil, că toate numerele de aceeași natură sînt, prin urmare, compuse din două pătrate."

În continuarea scrisorii către Carcavi, Fermat face aluzie la cîteva probleme de aritmetică pe care le-a rezolvat prin aceeași metodă. „Am considerat apoi unele chestiuni care, cu toate că sînt negative, nu sînt totuși fără o mare dificultate, metoda pentru a practica descinderea fiind cu totul diferită de precedentele, după cum este ușor de dovedit. Astfel sînt problemele următoare:

— Nu există nici un cub împărțit în două cuburi;
— Nu există decît un singur pătrat [anume $5^2 = 25$] în numere întregi care mărit cu un binar să facă un cub;
— Nu există decît două pătrate [anume $2^2 = 4$ și $11^2 = 121$], care, mărite cu 4, dau ca rezultat un cub".

Vom face aici o observație care din punct de vedere istoric este deosebit de importantă: Fermat citează printre problemele rezolvate prin metoda de demonstrație denumită de el însuși metoda *„descinderii infinite"*, aceea a „descompunerii unui cub într-o sumă de două cuburi", și declară că a demonstrat că este imposibilă în numere întregi. Această problemă este numai un caz particular al celebrei teoreme numite și „marea teoremă a lui Fermat" sau „ultima teoremă a lui Fermat", după care este imposibil ca puterea a

n-a a unui număr întreg să fie descompusă într-o sumă de două puteri n a două numere întregi. Această teoremă se enunţă, în termeni moderni, astfel:

$$x^n + y^n = z^n$$

nu este rezolvabilă în numere întregi. Sau încă: nu există 4 numere întregi x, y, z şi n ($n > 2$) care să satisfacă ecuaţia de mai sus. (Pentru $n = 2$, ecuaţia are soluţii în numere întregi.)

S-au ocupat cu căutarea demonstraţiei acestei teoreme, fără rezultate, cei mai mari matematicieni — Euler, Legendre, Gauss, Lejeune-Dirichlet, Kummer şi alţii —, demonstraţie pe care Fermat afirmase că o găsise. Într-adevăr, iată ce însemnare făcuse pe *Arithmetica* lui Diophante însuşi Fermat:

Cubum in duos cubos aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos et generaliter nullam in infinitum, ultram quadratum, potestatem in duas ejusdem nominis fas est dividere.

Cujus res demonstrationem mirabilem sane detexi; hanc marginis exiguitas non caperet. (Cubul în două cuburi sau pătratul-pătratului şi în general nici o putere pînă la infinit dincolo de pătrat nu este posibil să fie descompusă în două [puteri] de aceleaşi nume. Am găsit cu adevărat o demonstraţie admirabilă a acestui lucru; [care] în îngustimea acestei margini nu ar încăpea.)

Totuşi, „demonstraţia admirabilă" pe care Fermat afirmă că a găsit-o nu a fost aflată printre notele lui. Dar afirmaţia lui a făcut să curgă valuri de cerneală şi mii de memorii au fost scrise asupra acestei teoreme celebre, fără să se obţină vreun progres substanţial.

Am văzut mai sus, din scrisoarea către Carcavi, că el afirmă a fi aplicat metoda „descinderii infinite" într-un caz particular, anume în cazul exponentului ecuaţiei lui Fermat $n = 3$. Din cauza aceasta, matematicienii au fost înclinaţi să creadă că această teoremă a fost demonstrată de marele matematician francez cu ajutorul acestei metode. Totuşi noi vom face o observaţie, bazată chiar pe textul acestei afirmaţii, şi anume: Fermat scrie că a aplicat această metodă unor chestiuni „care, cu toate că sînt negative, nu sînt totuşi fără o mare dificultate, *metoda pentru a practica descinderea fiind cu totul diferită de precedentele*". Această afirmaţie arată două lucruri: 1) că în cazul particular al ecuaţiei diofantice $x^3 + y^3 = z^3$, pentru a arăta că nu e rezolvabilă în numere întregi, Fermat a aplicat metoda descinderii infinite; 2) că aplicarea acestei metode în cazul acesta particular este „cu totul diferită" de aplicarea ei în alte cazuri. Dacă metoda descinderii infinite a servit într-adevăr lui Fermat să găsească cu adevărat „o demonstraţie admirabilă" a marii sale teoreme, atunci „secretul" (aşa cum afirmă el însuşi) al metodei lui nu a fost dezvăluit nicăieri.

Poate că aceasta este şi explicaţia pentru care, cu toate încercările celor mai mari matematicieni, demonstraţia „ultimei teoreme" a lui Fermat nu a fost regăsită. Poate că tocmai fiindcă s-a căutat *o demonstraţie* a acestei teoreme, şi nu *secretul metodei* lui Fermat. După ştiinţa noastră, această metodă a fost preluată aşa cum s-a înţeles intuitiv, fără a se face niciodată o analiză mai profundă a ei din punct de vedere logic. De acea ne-am propus să examinăm această metodă mai de aproape în studiul de faţă.

III. APLICAREA EFECTIVĂ A ACESTEI METODE

Fermat a întrebuințat efectiv metoda „descinderii infinite" într-un caz particular al ecuației diofantice

$$x^n + y^n = z^n,$$

și anume pentru $n = 4$, pentru a dovedi că, dacă aria unui triunghi dreptunghi este exprimată în numere întregi, atunci ea nu poate fi egală cu un pătrat. Aceasta înseamnă, în termeni moderni, că ecuația

$$x^4 + y^4 = z^4$$

sau

$$x^4 + y^4 = (z^2)^2$$

nu este rezolvabilă în numere întregi. Textul demonstrației pe care-l dăm mai jos se găsește în notele asupra *Arithmeticii* lui Diophante, publicate de Samuel de Fermat, de care am vorbit.[3]

Iată textul, pe care, pentru interesul lui istoric, îl redăm în limba latină, cum a scris nota respectivă însuși Fermat:

Si area trianguli esset quadratus, donantur duo quadrato-quadrati quorum differentia esset quadratus. Unde sequitur dari duo quadrata quorum et summa et differentia esset quadratus. Datur itaque numerus compositus ex quadrato et duplo quadrati aequalis quadrato, ea conditione ut quadrati eum componentes faciant quadratum. Sed si numerus quadratus compositur ex quadrato et duplo alterius quadrati, ejus latus similiter compositur ex quadrato et duplo quadrati, ut facillime possumus demonstrare. Unde concludatur latus illud esse summum laterum circa rectum trianguli rectanguli et unum ex quadratis illud componentibus efficere basem et duplum quadratum aequari perpendiculo.

Illud itaque triangulum rectangulum conficietur a duobus quadratis quorum summa et differentia erunt quadrati. At isti duo quadrati minores probabuntur primis quadratis suppositis quorum tam summa quam differentia faciunt quadratum.

Ergo si dantur duo quadrata quorum summa et differentia faciunt quadratum, dabitur in integris summa duorum quadratorum ejusdem naturae priore minor. Eodem ratiocinio dabitur et minor ista inventa per viam prioris et semper in infinitum minores invenientur numeri in integris idem praestantes: quod impossibile est, quia dato numero quovis integro non possunt dari infiniti in integris illo minores.

Iată acum traducerea acestui text:

„Dacă aria unui triunghi ar fi un pătrat, ar exista două bipătrate a căror diferență ar fi un pătrat. Urmează că am avea două pătrate a căror sumă și diferență ar fi pătrate. Prin urmare, am avea un număr pătrat compus dintr-un pătrat și dublul unui alt pătrat, cu condiția ca suma celor două pătrate care servesc la compunerea lor să fie la fel un pătrat. Dar, dacă un număr pătrat este suma unui pătrat și a dublului unui pătrat, rădă-

[3] *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex et de numeris multangulis liber unus. Commentariis C. G. Bacheti et Observationibus D. P. de Fermat, Senatoris Tolosani*, p. 339.

cina sa este la fel suma dintre un pătrat și dublul unui pătrat, ceea ce pot să dovedesc fără dificultate.

Se va conchide de aici că această rădăcină este suma celor două laturi ale unghiului drept al unui triunghi dreptunghi, astfel că unul din pătratele componente va forma baza, iar dublul celuilalt pătrat va fi înălțimea.

Acest triunghi dreptunghi va fi format deci de două numere la pătrat, a căror sumă și diferență vor fi pătrate. Dar se va dovedi că suma acestor două pătrate este mai mică decît aceea a celor două dintii, despre care s-a presupus la fel că suma și diferența sînt pătrate. Deci, dacă se găsesc două pătrate a căror sumă și diferență sînt [respectiv] două pătrate, se dau, prin aceasta însăși, în numere întregi două pătrate care se bucură de aceeași proprietate și a căror sumă este inferioară.

Prin același raționament, vom avea apoi o sumă mai mică decît aceea dedusă din prima și, continuînd indefinit, se vor găsi totdeauna numere întregi din ce în ce mai mici, care satisfac aceleași condiții. Dar acest lucru este imposibil, deoarece, fiind dat un număr întreg, nu poate exista o infinitate de numere întregi mai mici."

Primul care a reluat metoda lui Fermat a fost Leonhard Euler (1707—1783). El a aplicat-o pentru a demonstra efectiv teorema: *„Nu este posibil să se găsească două cuburi, a căror sumă sau diferență să fie un cub"* (Euler, *Vollständige Anleitung zur Algebra*, problema 243).

După aceasta, ea a fost aplicată de mulți matematicieni în demonstrarea unor propoziții din teoria numerelor și în special a unor cazuri particulare a marii teoreme a lui Fermat.

Vom reda acum o demonstrație completă, făcută în stil modern, a teoremei citate mai sus, datorită lui Fermat, și anume că „o sumă de două bipătrate nu poate fi egală cu un bipătrat".

Expunerea pe care o vom face va ilustra metoda descinderii infinite, arătînd etapele prin care ea se desfășoară.

Teoremă: *Ecuația*

$$x^4 + y^4 = z^4 \tag{1}$$

nu are soluție în numere întregi.

Problema se reduce la demonstrația că ecuația

$$x^4 + y^4 = z^2 \tag{2}$$

nu are soluții în numere întregi. Într-adevăr, ecuația dată se poate scrie

$$x^4 + y^4 = (z^2)^2, \tag{3}$$

și, prin urmare, dacă ecuația (2) nu admite soluții întregi, atunci și ecuația (1) nu poate fi rezolvată în numere întregi. Altfel spus, dacă nu există o sumă de două bipătrate egală cu un pătrat, atunci, deoarece $z^4 = (z^2)^2$, adică un bipătrat este și un pătrat, ecuația (1) nu este posibilă în numere întregi.

Demonstrație

Ne ocupăm de ecuația (2). Dacă x și y nu sînt prime între ele, adică dacă ele au un divizor comun d, ceea ce se scrie $(x, y) = d$, atunci și z are în mod necesar acest divizor.

Într-adevăr, în cazul acesta, $x = dx_1$ și $y = dy_1$. Introducînd în ecuația (2), obținem

$$x_1^4 d^4 + y_1^4 d^4 = z^2$$

$$x_1^4 + y_1^4 = \left(\frac{z}{d^2}\right)^2.$$

Deoarece membrul întîi al acestei ecuații este un număr întreg prin ipoteză, și membrul al doilea trebuie să fie un număr întreg și deci z este în mod necesar divizibil cu d^2. Deci

$$z = d^2 z_1.$$

Introducînd în (2), obținem

$$x_1^4 d^4 + y_1^4 d^4 = d^4 z_1^2.$$

Simplificînd cu d^4,

$$x_1^4 + y_1^4 = z_1^2.$$

Prin urmare, dacă ecuația

$$x^4 + y^4 = z^2$$

admite soluții neprime între ele, atunci admite în mod necesar și soluții prime, și invers. Va fi de ajuns să demonstrăm că ecuația aceasta nu admite soluții prime, pentru ca să nu admită nici soluții neprime. Așadar, putem presupune că în această ecuație $(x,y) = 1$.

Un al doilea punct pe care-l vom menționa, mai înainte de a trece la aplicarea propriu-zisă a metodei lui Fermat, este că ecuația lui Fermat admite soluții întregi pentru exponentul $n = 2$. Într-adevăr, după cum se știe, ecuația

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{4}$$

admite soluțiile întregi date de formulele

$$x = a^2 - b^2$$
$$y = 2\,ab \tag{I}$$
$$z = a^2 + b^2.$$

Dacă se dau lui a și b valori întregi arbitrare și prime între ele (pentru a nu introduce factori comuni inutili), se obțin, pentru x, y și z, valori întregi care verifică ecuația dată, deoarece formulele de mai sus o verifică identic:

$$(2ab)^2 + (a^2 - b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

Să trecem acum la demonstrația, prin descindere infinită, a teoremei că ecuația

$$x^4 + y^4 = z^2$$

nu admite soluții întregi.

Să presupunem că această ecuație admite o soluție întreagă, fie aceasta x_0, y_0, z_0. Atunci avem

$$(x_0^2)^2 + (y_0^2)^2 = z_0^2.$$

Cu alte cuvinte, x_0^2, y_0^2, z_0 formează o soluție a ecuației $x^2 + y^2 = z^2$. Dar, după cum am menționat mai sus, ecuația aceasta are soluțiile întregi exprimate (toate) prin formulele (I). Astfel, avem

$$\begin{aligned} x_0^2 &= a^2 - b^2 \\ y_0^2 &= 2ab \\ z_0 &= a^2 + b^2. \end{aligned} \tag{II}$$

Prima egalitate se mai scrie

$$x_0^2 + b^2 = a^2,$$

care este ecuația (4), și, prin urmare, soluțiile ei sînt de forma (I). Dacă m și n sînt două numere întregi arbitrare, atunci ele pot fi scrise:

$$\begin{aligned} x_0 &= m^2 - n^2 \\ b &= 2mn \\ a &= m^2 + n^2. \end{aligned} \tag{III}$$

Considerind acum valoarea $y_0^2 = 2ab$ din (II), și înlocuind pe a și b cu valorile lor din (III), obținem

$$y_0^2 = 4mn(m^2 + n^2),$$

adică expresia $4mn\ (m^2 + n^2)$ trebuie să fie un pătrat perfect. Cum m și n sînt considerați primi între ei și cum $m^2 + n^2$ este un număr prim și cu m și cu n, urmează că fiecare din acești factori ai lui y_0^2 trebuie să fie un pătrat perfect, adică trebuie să existe niște numere întregi p, q și r, așa fel ca să avem

$$m = p^2;\ n = q^2;\ m^2 + n^2 = r^2.$$

Sau, dacă înlocuim valorile lui m și n în ultima egalitate, obținem

$$p^4 + q^4 = r^2$$

cu p și q primi între ei, $(p,q) = 1$.

Am ajuns în raționamentul nostru la o ecuație care are exact forma ecuației de la care am plecat.

Cu alte cuvinte, dacă ecuația $x^4 + y^4 = z^2$ admite soluția întreagă (x_0, y_0, z_0), atunci ecuația $p^4 + q^4 = r^2$ admite o soluție întreagă (deoarece am presupus că p, q, r sînt numere întregi).

Între aceste soluții întregi (x_0, y_0, z_0) și (p, q, r) există următoarele relații:

$$\begin{aligned} x_0^2 &= p^4 - q^4 \\ y_0^2 &= 4p^2q^2(p^4 + q^4) \\ z_0 &= (p^4 + q^4)^2 + 4p^4q^4, \end{aligned}$$

obţinute prin înlocuirea lui a şi b prin valorile lor respective în funcţie de p şi q.

Valoarea lui z_0 mai poate fi scrisă şi astfel, dacă ţinem seama de relaţiile dintre m, n şi p, q, r:

$$z_0 = r^4 + (2p^2q^2)^2 < r^4.$$

Din care rezultă

$$z_0 > r^4,$$

$$z_0 > r.$$

Conchidem: dacă există un număr întreg z_0, aşa fel că pătratul lui este o sumă de două bipătrate

$$z_0^2 = x_0^4 + y_0^4,$$

atunci există un număr întreg r mai mic decît z_0, al cărui pătrat este o sumă de două bipătrate:

$$r^2 = p^4 + q^4.$$

Rezumînd raţionamentul nostru, putem spune: dacă există trei numere întregi x_0, y_0, z_0, aşa fel că între ele există relaţia

$$x_0^4 + y_0^4 = z_0^2,$$

atunci există alte trei numere întregi x_1, y_1, z_1 care au aceeaşi relaţie între ele (unde z_1 este mai mic decît z_0):

$$x_1^4 + y_1^4 = z_1^2. \qquad z_1 < z_0$$

Considerînd acum ultima relaţie, putem, în virtutea aceluiaşi raţionament, să afirmăm: dacă există trei numere întregi x_1, y_1, z_1 între care există relaţia de mai sus, atunci există alte trei numere întregi x_2, y_2, z_2, unde z_2 este mai mic decît z_1 (şi deci şi decît z_0), care au aceeaşi relaţie între ele:

$$x_2^4 + y_2^4 = z_2^2. \qquad z_2 < z_1 < z_0$$

În felul acesta „descindem" de la soluţia presupusă la o altă soluţie: dacă există un număr întreg z_0 al cărui pătrat se descompune într-o sumă de două bipătrate, atunci există un număr întreg z_1, mai mic decît z_2, care se descompune într-o sumă de două bipătrate; pentru acelaşi motiv există un număr întreg z_2, mai mic decît z_1 (şi deci decît z_0), care se descompune într-o sumă de două bipătrate; apoi va exista un număr $z_3 < z_2 < z_1 < z_0$ care se va bucura de aceeaşi proprietate; apoi $z_4 < z_3 < z_2 < z_1 < z_0$ şi aşa mai departe la infinit.

Presupunerea noastră că există un număr întreg z_0, al cărui pătrat se descompune într-o sumă de două bipătrate, conduce în mod necesar la afirmaţia că există o serie infinită de numere întregi mai mici decît z_0 care au aceeaşi proprietate.

Dar între un număr dat şi zero (este vorba de numere naturale) nu pot exista o serie infinită de numere întregi (Fermat, după cum am văzut, spune: „fiind dat un număr întreg, nu pot exista o infinitate de numere întregi mai mici").

Ipoteza pe care am admis-o că ar exista numere întregi care verifică ecuația

$$x^4 + y^4 = z^2,$$

conducînd la un rezultat absurd, trebuie respinsă, și deci nu există numere întregi care verifică ecuația dată.

Iată astfel aplicată în mod concret metoda „descinderii infinite" într-un caz dat.

IV. FONDUL LOGIC AL ACESTEI METODE

Fermat însuși situează metoda descoperită de el printre argumentările de tipul ἀπαγωγήν εἰς ἀδύνατον, adică „reducerea la absurd". După cum am văzut, el precizează că metoda se aplică și în cazul propozițiilor negative, și în cazul propozițiilor afirmative.

A. În cazul propozițiilor negative, el face următorul raționament, care în schemă poate fi redus la cinci trepte astfel:

1°. Vrem să demonstrăm că nu există numere întregi care au o anumită proprietate.

2°. Presupunem ipoteza contrară că există astfel de numere.

3°. Această ultimă ipoteză conduce la implicația că există numere mai mici decît numerele presupuse că au proprietatea considerată.

4°. Implicația generală 3°, detaliată, arată că, din ipoteza că ar exista niște numere date, avînd proprietatea considerată, rezultă concluzia că ar trebui să existe o infinitate de numere întregi mai mici decît cele considerate, care se bucură de aceeași proprietate.

5°. Dacă „descindem" însă de la un număr întreg natural, nu putem avea o infinitate de numere întregi mai mici decît el, deci ipoteza considerată ca punct de plecare a raționamentului nostru este imposibilă; prin urmare, ipoteza contrară este valabilă, anume că nu există astfel de numere avînd proprietatea considerată.

B. În cazul propozițiilor afirmative, etapele „descinderii infinite" sînt aceleași, dar problema, după cum am văzut că subliniază însuși Fermat, este mai dificilă și necesită multe ocoluri. Iată în rezumat cum descrie Fermat aceste etape (vezi, mai înainte, scrisoarea către Carcavi):

1°. Fie să demonstrăm propoziția (afirmativă) că toate numerele întregi de forma $4k + 1$ se pot descompune într-o sumă de două pătrate.

2°. Presupunem ipoteza contrară, că un număr avînd proprietatea aceasta (adică de forma $4k + 1$) nu este compus din două pătrate.

3°. Ipoteza aceasta conduce la concluzia generală că atunci ar exista un număr mai mic decît acel dat, de aceeași formă ($4k + 1$), care nu este compus din două pătrate.

4°. Implicația generală 3°, detaliată, arată că, oricare ar fi numărul mai mic decît cel considerat, avînd forma $4k + 1$, nu se poate descompune într-o sumă de două pătrate. Dar considerînd numărul întreg cel mai mic

de forma aceasta și care este $5 = 4.1 + 1$, vedem că el se descompune într-o sumă de două pătrate: $5 = 1^2 + 2^2$. Am ajuns la o contradicție.

5°. Ipoteza considerată că ar exista numere de forma aceasta, care nu au proprietatea considerată, conducînd la o contradicție, trebuie respinsă, și deci ipoteza contrară este valabilă: orice număr întreg de forma $4k + 1$ se descompune într-o sumă de două pătrate.

Ceea ce voim să subliniem în această metodă este faptul, recunoscut și de Fermat, că este o metodă de raționament prin *reducere la absurd*. Fondul acestei metode create de Fermat constă într-o implicație. Reamintim că, în scrisoarea către Carcavi, el singur scrie: „Nu adaug motivul pe baza căruia inferez că, dacă ar exista un triunghi de felul acesta, ar exista un altul de aceeași natură mai mic decît primul, pentru că aceasta ar necesita o expunere prea lungă și pentru că în aceasta constă *secretul* întregii mele metode".

Cu alte cuvinte, conform cu afirmația însăși a lui Fermat, demonstrația implicației „dacă există un triunghi dat cu o anumită proprietate, atunci există un triunghi mai mic cu aceeași proprietate", este „secretul" și deci fondul metodei lui.

Să luăm teorema demonstrată mai sus, anume că ecuația $x^4 + y^4 = z^2$ nu are soluții în numere întregi. Aceasta vrea să spună: dacă există un număr z al cărui pătrat se descompune într-o sumă de două bipătrate, atunci există un număr z_1 mai mic decît z, care are aceeași proprietate. Adică, dacă teorema este valabilă pentru un număr z, atunci ea este valabilă pentru un alt număr z_1, cu $z_1 < z$.

Să scriem, pe scurt $T(z)$, teorema pentru numărul z și $T(z_1)$, teorema pentru z_1. Avem implicația

$$T(z_0) \rightarrow T(z_1). \qquad z_1 < z_0$$

Aceasta este implicația generală, „secretul" și fondul metodei „descinderii infinite".

Să presupunem că notăm semnul de negație cu $\sim$. Vom avea schematizate cele două cazuri, de care am vorbit mai sus, după cum urmează.

A. Să presupunem că voim să demonstrăm o propoziție negativă, anume $\sim T(z)$, ceea ce vrea să însemne că teorema considerată nu este valabilă, oricare ar fi numărul z.

Presupunem că este valabilă negația acestei propoziții, $T(z)$. Această ipoteză duce în mod necesar la implicația

$$T(z) \rightarrow T(z_1). \qquad z_1 < z$$

Această implicație cuprinde toate cazurile particulare, adică spune că ipoteza ar fi valabilă pentru o serie infinită de numere întregi mai mici decît z_1:

$$T(z_0) \rightarrow T(z_1)$$
$$T(z_1) \rightarrow T(z_2)$$
$$T(z_2) \rightarrow T(z_3)$$

. . . .

$$T(z_n) \to T(z_{n+1})$$

. . . .

$$z_0 > z_1 > z_2 > \cdots > z_n > z_n + 1 > \cdots$$

Dar între un număr natural dat și zero nu pot exista o infinitate de numere naturale, deci ipoteza că $T(z)$ ar fi valabilă trebuie respinsă, și, prin urmare, $\sim T(z)$ este valabilă.

B. Același mers îl are acest mod de a demonstra și în cazul propozițiilor afirmative.

Vrem să demonstrăm că teorema $T(z)$ este valabilă pentru orice număr natural z care are o anumită formă. Atunci se presupune că ipoteza contrară este valabilă, adică $\sim T(z)$.

Se demonstrează apoi implicația generală

$$T(z) \to T(z_1),$$

unde z și z_1 sînt numere care se bucură de anume proprietăți sau au o anumită formă. Această implicație generală se detaliază astfel: dacă există un număr z_0 de această formă pentru care $\sim T(z)$ este valabilă, atunci există de asemenea un număr z_1 de aceeași formă pentru care $\sim T(z)$ este valabilă (unde $z_1 < z_0$); dacă există un număr z_1 de această formă pentru care $\sim T(z)$ este valabilă, atunci există, de asemenea, un alt număr z_2 pentru care teorema $\sim T(z)$ este valabilă (unde $z_2 < z_1$) etc. Ceea ce se scrie:

$$\sim T(z_0) \to \sim T(z_1)$$

$$\sim T(z_1) \to \sim T(z_2)$$

$$\sim T(z_2) \to \sim T(z_3)$$

. . . .

$$\sim T(z_n) \to \sim T(z_{n+1})$$

. . . .

$$z_0 > z_1 > z_2 > \cdots > z_n > z_{n+1} > \cdots$$

Se poate conchide în două moduri că ipoteza făcută nu este posibilă: 1) sau că, „descinzînd" de la un număr natural de o anumită „formă", nu pot exista între el și zero o infinitate de numere întregi; 2) sau, luînd un număr mai mic decît numărul z_0, avînd aceeași structură, se constată că teorema este valabilă; presupunerea că nu e valabilă este atunci absurdă și demonstrația este făcută.

Se vede dar că în metoda „descinderii infinite" intră ca element esențial component metoda „inducției matematice" sau „inducției complete" prin care se stabilește o „formulă de recurență", nucleul acestui tip de raționament fiind tocmai o implicație generală. Pentru aceasta, și pentru a se putea face mai bine comparația dintre cele două metode, vom expune succint această ultimă metodă.

V. METODA INDUCȚIEI MATEMATICE

Vom începe prin a expune o demonstrație efectivă prin „inducție matematică", pentru a putea mai ușor să-i sesizăm structura ei logică.

Să găsim, prin această metodă, formula care dă suma seriei:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots$$

Să considerăm sumele respective pentru $n=1$, $n=2$, $n=3$, ..., etc.

$$S_1=\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}$$

$$S_2=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}=\frac{2}{3}$$

$$S_3=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}=\frac{3}{4}$$

....

După cum se vede pentru S_1 numărătorul rezultatului este chiar indicele sumei și numitorul este același număr mărit cu o unitate; același lucru îl observăm pentru $S_2=\frac{2}{3}$; pentru $S_3=\frac{3}{4}$ etc. Sîntem înclinați să tragem concluzia, prin *inducție*, că, oricare ar fi suma S_n, rezultatul va fi egal cu $\frac{n}{n+1}$.

Am trece atunci însă de la o verificare a unui număr limitat de cazuri la un număr nelimitat de cazuri, și inducția ar fi o inducție incompletă, și nu una completă sau matematică.

Pentru aceasta va trebui să stabilim o formulă generală de recurență, care să arate că formula de însumare a termenilor seriei este valabilă pentru oricare număr întreg n.

Să presupunem deci că formula este valabilă pentru un număr natural n, cu alte cuvinte că avem

$$S_n=\frac{n}{n+1}.$$

Să considerăm acum S_{n+1}, adică suma termenilor seriei pentru succesorul lui n. Această sumă se va compune din toți termenii seriei la care se va adăuga termenul următor, a cărui lege de formare este dată de însăși succesiunea termenilor. Dacă formula sumei „indusă" este adevărată, pentru S_{n+1} va trebui să avem

$$S_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}.$$

Dar S_{n+1} se compune din suma tuturor termenilor din care este compusă suma S_n, plus termenul următor, care este $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Dar am presupus că pentru S_n formula sumei seriei este valabilă, deci

$$S_{n+1} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Am stabilit deci următoarea implicație: dacă formula sumei este valabilă pentru n, atunci ea este valabilă și pentru $n+1$:

$$S_n \to S_{n+1}.$$

Dar s-a verificat mai sus că formula

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

este valabilă petntru $n = 1$, deci ea este valabilă și pentru $n = 2$; dar, dacă ea este valabilă pentru $n = 2$, atunci ea este valabilă și pentru $n = 3$ după formula (1) și așa mai departe. Ceea ce se poate scrie după cum urmează:

S-a stabilit implicația generală (formula de recurență):

$$S_n \to S_{n+1}.$$

Dar s-a verificat că formula este valabilă pentru $n = 1$. Deci

$$S_1 \to S_2$$

$$S_2 \to S_3$$

$$S_3 \to S_4$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$S_n \to S_{n+1}.$$

Formula este valabilă pentru orice număr intreg n.

Acum putem formula metoda „inducției complete" în două etape:

1) Se stabilește implicația generală că, dacă o teoremă este valabilă pentru un număr natural n, atunci ea este, în această ipoteză, valabilă și pentru succesorul lui n, anume $n + 1$. Ceea ce scriem:

$$T(n) \to T(n+1).$$

Dar s-a verificat că teorema este valabilă pentru un număr dat n_0; atunci vom avea următoarele implicații:

$$T(n_0) \to T(n_0 + 1)$$

$$T(n_0 + 1) \rightarrow T(n_0 + 2)$$
$$T(n_0 + 2) \rightarrow T(n_0 + 3)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Deci teorema este valabilă pentru orice număr întreg.

Procedeul acesta, al inducţiei matematice, este aplicat, după cum se poate vedea, şi în „descinderea infinită" a lui Fermat, cu o mică variantă, pe care o vom sublinia în cele ce urmează.

VI. ANALIZA LOGICĂ A INDUCŢIEI MATEMATICE

După cum se ştie, H. Poincaré a crezut că tipul raţionamentului matematic, prin excelenţă, este inducţia matematică sau completă. După celebrul matematician francez, „silogismul nu poate să ne înveţe nimic esenţial nou, şi dacă totul ar trebui să fie scos din principiul identităţii, totul ar trebui să se reducă la acesta. Se va admite oare că enunţurile tuturor acestor teoreme, care umplu atîtea volume, nu sînt decît moduri deturnate de a spune *A* este *A*?" [4]

Ar exista astfel o serie de raţionamente de genul acesta, dintre care „inducţia matematică" este numai un exemplu, după Poincaré, deşi despre alte raţionamente de acest tip nu a vorbit nimic.

Dacă urmărim expunerea lui Poincaré, putem înfăţişa procesul raţiocinativ al recurenţei în felul următor.

Pentru a stabili o teoremă în care intervine un număr natural n, fie $T(n)$ se dovedeşte:

a) că teorema este adevărată pentru $n = 1$ (sau $n = 0$), adică

$$T(1).$$

b) că, dacă teorema este adevărată pentru n, atunci este adevărată şi pentru $n + 1$, adică adevărul teoremei $T(n)$ justifică teorema $T(n + 1)$:

$$T(n) \rightarrow T(n + 1). \qquad (1)$$

Procesul deductiv pentru enunţurile teoremei generale este următorul:

Teorema $T(1)$ este adevărată; în virtutea implicaţiei (1) este adevărată $T(2)$; dacă $T(2)$ este adevărată, atunci, în virtutea relaţiei (1), este adevărată $T(3)$ etc.

Deci $T(n)$ este adevărată oricare ar fi n.

Examinînd raţionamentul acesta, Poincaré nu poate să nu observe că avem de-a face aici tot cu silogisme, şi anume cu „o infinitate de silogisme în cascadă" [5]. Considerarea infinităţii de concluzii ale acestor silogisme, fără a le construi pe toate — *fără a putea să le construim pe toate* — într-o teoremă unică, se datoreşte unei posibilităţi de sinteză pe care o are intuiţia noastră,

[4] H. Poincaré, *La Science et l'hypothèse* (Paris, 1902), p. 9.
[5] H. Poincaré, *op. cit.*, p. 20.

după Poincaré. Nu în silogismele acestea stă puterea creatoare a raționamentului, ci în sinteza unei serii infinite, care ne conduce la teorema generală.

Doi autori care s-au ocupat în special de problema raționamentului matematic, anume Daval și Guilbaud, au accentuat foarte bine că nu este vorba aici de „de o serie de silogisme" (cum credea E. Goblot în al său *Traité de logique*), ci de o *infinitate de silogisme*[6].

Poincaré găsește însă că această metodă de demonstrație nu poate fi redusă nici la regulile simple de logică, nici nu poate constitui o axiomă de logică, deoarece presupune seria numerelor naturale, deci nu poate fi anterioară aritmeticii. Mai curînd seamănă cu postulatele geometriei, care sînt definiții deghizate (după H. Poincaré). Dar acest mod de a acționa nu este convențional: el implică o putere spontană a minții noastre și este indispensabil în aritmetică, de unde denumirea lui: *axioma inducției matematice*.

Așadar, raționamentul matematic prin recurență nu este susceptibil, după Poincaré, să aibă o justificare logică și se bazează pe o intuiție originară, care este de natură matematică. Aceasta este teza generală a lui Poincaré: deoarece silogismul este tautologic, el nu poate adăuga nimic premiselor, și deci, în concluzie, nu putem regăsi altceva decît datele de la care am plecat. Astfel, fiecare teoremă nu ar fi nouă decît pentru că ar interveni o axiomă nouă. Cum acest lucru nu se întîmplă, urmează că inteligența noastră ar face uz de diverse principii sintetice, cum e axioma de inducție completă și cum ar mai fi și altele, din care Poincaré nu ne-a dat nici un exemplu, și care ar face ca silogismul, plus axioma respectivă care funcționează simultan cu operația silogistică, să constituie o operație logică creatoare.

Goblot a adus raționamentului prin recurență două obiecții[7]:

1) nu se aplică decît seriei numerelor naturale;

2) conține cel puțin o demonstrație de care nu poate da seama.

În ceea ce privește prima obiecție, Daval și Guilbaud au arătat (în lucrarea citată) că raționamentul prin recurență este numai un exemplu, în concepția lui Poincaré, nu singurul mod de a raționa în matematici. De altfel, însuși Poincaré, declară în *La Science et l'hypothèse*, că există o mulțime de alte procedee în matematici care se bazează pe o sinteză efectuată de intelectul nostru.

A doua obiecție i se pare lui Goblot însă decisivă: raționamentul prin recurență conține o demonstrație care este mai importantă decît trecerea progresivă de la un număr la numărul următor, căci, demonstrînd că, dacă proprietatea este adevărată pentru n ea este adevărată și pentru $n + 1$, se demonstrează tocmai legitimitatea acestei treceri.[8] Dar tocmai acesta-i nodul problemei și tocmai acesta este trecut cu vederea la Poincaré. Raționamentul prin recurență nu poate astfel decît să extindă aplicația unei proprietăți, spune Goblot, nu să o demonstreze. Într-adevăr, demonstrația aceasta comportă două momente: 1° se demonstrează că o proprietate adevărată pentru n este adevărată și pentru $n + 1$; 2° se aplică recurența, adică dreptul de a generaliza ce s-a obținut în primul moment al demonstrației.

În fond, ceea ce este important este partea întîi a demonstrației, care stabilește relația de recurență, partea a doua nefiind decît o aplicație a ei.

[6] A se vedea R. Daval și G. T. Guilbaud, *Le Raisonnement mathématique* (Paris, 1945).
[7] E. Goblot, *Traité de logique*, p. 260.
[8] E. Goblot, *op. cit.*, p. 263.

Dar tocmai stabilirea acestei implicaţii, care este o relaţie de recurenţă, era socotită de Fermat ca fiind „secretul metodei sale".

Acest punct central al „inducţiei matematice" conţine o dilemă, care nu a fost observată şi pe care noi o vom rezuma astfel:

Sau implicaţia de recurenţă, de care am vorbit mai sus

$$T(n) \to T(n+1)$$

este făcută cu ajutorul raţionamentului obişnuit, şi deci ea se reduce la acesta, sau este făcută printr-un raţionament prin recurenţă şi atunci ea presupune principiul acestui raţionament mai înainte de a fi demonstrată, adică presupune tocmai ceea ce este în cauză.

Mulţi logicieni care şi-au dat sema de dificultăţile implicate de această problemă au conchis că ideea de recurenţă este o idee primitivă, ba chiar că principiul acestui raţionament este o definiţie, cum susţine Bertrand Russell. Împotriva lui Poincaré, care credea, după cum am văzut mai sus, că inducţia matematică condensează o infinitate de silogisme într-un raţionament unic, pe baza unui principiu sintetic al minţii noastre, Russell afirmă că inducţia matematică este o definiţie, şi nu un principiu. Există numere cărora li se aplică această definiţie prin recurenţă, cum sînt numerele naturale, şi care vor fi numite, astfel, numere inductive; există însă şi numere care nu se pretează la o astfel de definiţie, cum sînt numerele cardinale infinite, care nu sînt inductive.[9]

Numerele naturale vor fi definite de Russell ca fiind acelea ce pot fi stabilite graţie inducţiei matematice, şi nu în virtutea vreunei intuiţii misterioase, a unei axiome sau a unui principiu; ele se prezintă ca o simplă propoziţie literală. Dacă definim „patrupedele" ca fiind animale cu patru picioare, orice animal care va avea patru picioare va fi un patruped; definiţia generală va acorda fiecărui membru al acestei clase această calitate. „Cazul numerelor supuse regimului inducţiei matematice este acelaşi", scrie Russell.

Principiul inducţiei matematice este enunţat de Russell astfel: „Ceea ce poate fi inferat de la vecin la vecin poate fi inferat de la primul la ultimul".

Acest principiu este în perfectă ordine dacă este vorba de un număr finit de cazuri, dar dificultatea rezidă în faptul extinderii nelimitate a acestui principiu: ce ne îndreptăţeşte să spunem că ceea ce poate fi inferat de la vecin la vecin poate fi inferat de la primul la fiecare termen al unui şir infinit de termeni?

VII. NATURA INDUCŢIEI MATEMATICE

Să considerăm din nou schema raţionamentului prin recurenţă. Avem implicaţie între $T(n)$ şi $T(n+1)$:

$$T(n) \to T(n+1).$$

Dacă teorema este adevărată pentru numărul natural n, atunci este adevărată şi pentru succesorul lui, $n+1$. Se constată apoi că teorema este adevărată pentru un număr natural n dat, fie 0 sau 1 etc. Adică *ştim* că $T(0)$ sau $T(1)$ sau $T(2)$ este sigur adevărată (prin verificare).

[9] B. Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy* (Londra, 1920).

Întreaga problemă a inducției matematice constă în a găsi justificarea logică a propoziției: „$T(n)$ este adevărată oricare ar fi n".

Să revenim la schema raționamentului prin recurență. Avem aici o implicație și o verificare.

Se știe, de exemplu, că $T(0)$ este adevărat sau $T(1)$ etc.

Schema revine la un *modus ponens*: dacă $T(0)$ implică $T(1)$ și dacă $T(0)$ este adevărată, atunci $T(1)$ este adevărată; dar $T(0)$ este adevărată, deci $T(1)$) este adevărată. Apoi $T(1)$ implică $T(2)$; $T(1)$ este însă adevărată, deci $T(2)$ este adevărată etc.

Adică

$$\begin{array}{l} T(0) \text{ este adevărată} \\ \underline{T(0) \rightarrow T(1)} \\ \text{Deci } T(1) \\ \\ \underline{T(1) \rightarrow T(2)} \\ \text{Deci } T(2) \\ \\ \underline{T(2) \rightarrow T(3)} \\ \text{Deci } T(3) \\ \\ \underline{\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \text{Deci } T(n) \\ \\ \underline{T(n) \rightarrow T(n+1)} \\ \text{Deci } T(n+1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Descompus în felul acesta, raționamentul prin recurență revine la o infinitate de *modi ponentes*, fiindcă pentru fiecare număr natural avem un asemenea *modus ponens*, și există o infinitate de numere naturale. Problema logică este: ce ne îndreptățește să afirmăm că, fără a efectua seria infinită de *modi ponentes* — fiindcă nu este posibil să o facem — $T(n)$ este adevărat oricare ar fi numărul natural n?

Cei care s-au ocupat de raționamentul acesta și-au îndreptat atenția spre concluzia generală enunțată mai sus, dar nici Poincaré, nici ceilalți cercetători nu au dat o atenție mai mare însăși logicii acestui mod de a raționa, care este tocmai implicația

$$T(n) \rightarrow T(n+1).$$

Dar această implicație exprimă ea însăși o teoremă valabilă în mod recurent pentru toate numerele naturale, pentru oricare n. *Generalitatea completă, extinsă la șirul infinit al numerelor naturale, este conținută în această implicație.* Cu toate acestea, nu această teoremă a fost pusă în discuție, deși ea și numai ea validează concluzia: „$T(n)$ este adevărată oricare ar fi n" Mai mult, stabilirea acestei implicații generale nu se face niciodată printr-un raționament prin recurență, ci raționînd, în mod general, asupra numărului

n ca reprezentant al tuturor numerelor naturale. Nimeni însă nu s-a întrebat — fiindcă părea de la sine înțeles — de ce această implicație este admisă fără discuție, *deși ea reprezintă o trecere de la finit la infinit.* Într-adevăr, implicația noastră se poate descompune, dacă vrem să punem în evidență ceea ce ea reprezintă efectiv:

$$T(0) \rightarrow T(1)$$

$$T(1) \rightarrow T(2)$$

$$T(2) \rightarrow T(3)$$

$$T(3) \rightarrow T(4)$$

$$T(4) \rightarrow T(5)$$

....

$$T(n) \rightarrow T(n+1)$$

....

Ea nu a fost obținută însă în modul acesta, raționînd pe un număr oarecare (chiar foarte mare) de cazuri particulare și apoi generalizînd, extrapolînd de la domeniul finitului la domeniul infinitului, ci raționînd direct și în general, *considerînd pe n ca fiind numărul natural în general.* Cum se face atunci că numai în cazul concluziei finale, „$T(n)$ este adevărată oricare ar fi n", avem nevoie de o trecere de la finit la infinit, de un raționament prin recurență? De ce nu putem, ca și în cazul implicației generale $T(n) \rightarrow T(n+1)$, să raționăm direct și în general asupra concluziei generale $T(n)$ (valabilă pentru tot șirul numerelor naturale)?

Numărul n reprezintă în mod colectiv întregul șir al numerelor naturale: n nu este un număr determinat, ci este *numărul natural în general.* De asemenea, numărul $n+1$ nu reprezintă un număr determinat, ci numărul natural în general, ca succesor al predecesorului său.

Cînd am stabilit implicația

$$T(n) \rightarrow T(n+1),$$

insuși enunțul ei ne arată că am stabilit o proprietate nu pentru numărul n, care are rangul n determinat, în șirul numerelor naturale, ci o proprietate absolut generală pentru numărul întreg: dacă teorema este adevărată pentru un număr natural oarecare, atunci ea este adevărată și pentru succesorul lui.

Dacă acum avem să punem în evidență această proprietate exprimată prin implicația precedentă, luînd numărul n ca reprezentant colectiv al numărului întreg, dacă deci vrem să o exprimăm în mod distributiv, distribuind-o tuturor numerelor naturale, vom traduce implicația generală de mai sus astfel: proprietatea considerată este ereditară pentru toate numerele naturale, adică, dacă este valabilă pentru un număr întreg, toți succesorii lui 0 o au; dar proprietatea este valabilă pentru $n=0$ (sau $n=1$ sau o altă valoare), deci ea este valabilă pentru toți succesorii lui 0 (sau 1 etc.), adică pentru toate numerele naturale.

Cu alte cuvinte, avem aici un singur *modus ponens*: *Dacă teorema este adevărată pentru un număr natural, atunci ea este adevărată pentru toți succe-*

sorii acestui număr; dar teorema este adevărată pentru numărul zero (sau 1 etc.); deci teorema este adevărată pentru toți succesorii lui zero (sau 1 etc.).

Acesta este raționamentul descifrat exact, conținut în „inducția matematică".

Dacă vrem să scriem schematic și distributiv acest *modus ponens*, formulat mai sus, avem (întrebuințînd semnul de aserțiune al lui Frege („⊢")):

$$\vdash \cdot T(0) \rightarrow T(1) \rightarrow T(2) \rightarrow T(3) \rightarrow \ldots \rightarrow T(n)$$

$$\frac{\vdash \cdot T(0)}{\vdash \cdot T(n)}$$

Adică teorema este valabilă oricare ar fi numărul natural *n*.

Ce face însă Poincaré, ca și ceilalți matematicieni care s-au ocupat de această problemă? Ei intră în lanțul acesta, scot afară implicații de teoreme pentru perechi de numere succesive și ajung la un șir infinit de *modi ponentes*, pe care nu-l mai pot explica, pentru că, după expresia lui Kant, „Sinteza unei serii de stări succesive este imposibilă".

Într-adevăr, procedeul acesta este analog cu acela întrebuințat de Kant pentru construirea „antinomiilor rațiunii pure" în *Kritik der reinen Vernunft* sau cu acela mai vechi cu care Zenon Eleatul și-a construit celebrele lui argumente, cel al *„dihotomiei"* sau cel al lui „Achille și *Broasca țestoasă*".

Să presupunem că un mobil are de parcurs distanța *AB*. Pentru aceasta el trebuie să parcurgă mai întîi jumătate din această distanță; dar, pentru a parcurge această ultimă distanță, el trebuie să parcurgă mai întîi jumătatea acestei jumătăți; raționînd în felul acesta mai departe, mobilul va trebui să parcurgă o infinitate de spații intervale pentru a ajunge de la punctul *A* la punctul *B* și nu va ajunge astfel niciodată.

Dacă am scanda, pentru a spune așa, fiecare *modus ponens*, în care scindăm implicația generală, distribuind-o separat la fiecare pereche de numere succesive, este evident că nu vom putea ajunge niciodată la ultimul *modus ponens* și că raționamentul prin recurență ar avea o virtute miraculoasă, care operează trecerea de la finit la infinit; ca și în cazul *dihotomiei*, ar fi imposibil să ajungem practic la sfîrșitul operației. Dar raționamentul prin recurență nu operează în mod *distributiv*, ci pe proprietățile colective ale numerelor naturale, ceea ce exprimă indiscutabil implicația generală:

$$T(n) \rightarrow T(n+1).$$

Aceasta înseamnă: *ceea ce am demonstrat pentru un număr natural în general este valabil pentru oricare număr.*

În implicația de mai sus, *n* are semnificația unei variabile care parcurge toate valorile numerelor naturale, ea se referă la variabila *n*, și nu la valorile particulare pe care această variabilă poate să le ia, dar sînt conținute implicit în această relație. Dacă putem demonstra o asemenea implicație, am demonstrat-o dintr-o dată pentru toate valorile particulare ale variabilei *n*.

Conceptul general al numărului se prezintă astfel ca o variabilă, așa cum spunea Wittgenstein: *Der Zahl Begriff ist die variable Zahl* — „Conceptul de număr este variabila de număr" [10].

[10] L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, prop. 6.022 (Londra, 1933).

Același lucru se poate spune și despre definițiile prin recurență. *Definiția prin recurență se referă la variabila „număr" și nu la valorile acestei variabile.*

VIII. CONCLUZII

Sîntem în măsură acum să descifrăm exact structura logică a metodei „descinderii infinite".

După cum s-a văzut, din înseși afirmațiile lui Fermat și din aplicarea metodei, ea se bazează pe o implicație, exact ca și în metoda „inducției matematice". Singura deosebire este că implicația fundamentală — a cărei demonstrație este esențială pentru metodă sau, după expresia lui Fermat, este „secretul" metodei — nu mai se referă la numerele naturale în ordinea succesiunii lor. Pe cînd metoda inducției complete poate fi denumită o *„ascensiune infinită"*, fiindcă extinde o proprietate de la oricare număr natural la succesorul lui, metoda „descinderii infinite" coboară de la *un număr natural la un număr mai mic decît acesta, fără să presupună că ultimul este succesorul primului.*

Cu alte cuvinte, implicația fundamentală în metoda lui Fermat este următoarea: dacă n este un număr natural, pentru care o teoremă este valabilă, atunci există un număr $m = n - k$, deci $m < n$, pentru care teorema este valabilă, adică

$$T(n) \to T(n - k).$$

Aceasta-i singura diferență între implicația care apare în inducția matematică și aceea care se stabilește în „descinderea infinită" a lui Fermat.

O dată ajunși la această implicație, concluzia căutată se poate stabili pe două căi: sau se trage *consecința* că ar trebui să existe o infinitate de numere între un număr natural dat n și zero, toate bucurîndu-se de aceeași proprietate, ceea ce nu este posibil; sau se trage concluzia sub forma că, oricare număr natural mai mic decît n, de aceeași formă, se bucură de proprietatea considerată și se verifică pe un caz concret că această concluzie este falsă.

Cu alte cuvinte, metoda lui Fermat se compune din două părți, întrebuințate curent în demonstrațiile matematice:

1) reducerea la absurd;
2) inducția completă.

1° Fie să demonstrăm o teoremă $T(n)$; atunci să presupunem că este valabilă negația ei. Fie să demonstrăm o propoziție negativă $\sim T(n)$; atunci să presupunem valabilă $T(n)$.

Că acest mod de a demonstra intră în categoria demonstrațiilor prin absurd, lucrul acesta a fost afirmat de însuși Fermat, după cum se vede din fragmentele citate mai înainte, în care el clasa metoda lui printre așa-numitele „demonstrații apagogice".

2°. Plecînd de la afirmația contrară aceleia care trebuie demonstrată, se ajunge la implicația generală:

$$T(n) \to T(n - k).$$

Aceasta arată, după cum am văzut, că există o infinitate de numere, mai mici decît un număr dat n, ceea ce este imposibil, sau că toate numerele mai mici decît n, dar de aceeași formă, se bucură de aceeași proprietate, și se constată că nu este adevărat.

Ipoteza admisă trebuind să fie respinsă, fiindcă conduce la o contradicție, rămîne că propoziția inițială este valabilă.

După cum vedem, metoda „descinderii infinite" nu conține scheme de demonstrație noi față de cele cunoscute. Noutatea ei constă în ingeniozitatea cu care combină demonstrația *ab absurdo* cu inducția completă.

Aplicarea ei cere într-adevăr multă ingeniozitate pentru demonstrarea implicației

$$T(n) \rightarrow T(n-k),$$

ingeniozitate care poate fi numită, o dată cu Fermat, într-adevăr „un secret", fiindcă, de fiecare dată, demonstrația unei astfel de implicații este un act original și constituie de fapt un proces inventiv, pe care numai o inteligență puternică și familiarizată cu subtilitățile demonstrațiilor celor mai delicate îl poate realiza.

Probleme de logică, III, București, 1971.

Wittgenstein și soluția paradoxelor

I. INTRODUCERE

Știm puține lucruri despre viața lui Wittgenstein și acestea sînt mai mult cele consemnate de foștii lui elevi Malcolm și von Wright. Ei ne informează că Wittgenstein nu era un erudit, că el era un geniu spontan, și că opera lui este mai puțin o originală organizare a ideilor altora sau ale lui proprii, cît mai ales o colecție de intuiții intelectuale. Această aserțiune este confirmată de faptul că nici *Tractatus logico-philosophicus* (prima lucrare a lui Wittgenstein, care l-a făcut celebru) și nici *Philosophische Untersuchungen* nu sînt teorii expuse sistematic, ci numai însemnări lapidare și aforistice ale unor fulgurații intelectuale.

Originea inspirației lui este greu de stabilit și, în afară de operele lui Frege și Russell, care, după propria lui mărturisire, l-au influențat într-un mod determinant, nu avem nici o altă indicație din partea lui asupra influențelor pe care le-a suferit. În ceea ce privește logica Evului Mediu, nu putem spune dacă și în ce măsură Wittgenstein a cunoscut-o. Știm, totuși, că el a menționat deviza lui Ockam în *Tractatus*, de două ori. La 3.328 el scrie: „Dacă un semn nu este *întrebuințat*, el este fără semnificație. Acesta este sensul devizei lui Ockam." Și la 5.47321 găsim: „Deviza lui Ockam nu este arbitrară sau o regulă justificată prin succesul ei practic: ea spune că elementele simbolice care nu sînt necesare nu semnifică nimic".

Putem infera din aceste două propoziții că filosofia lui Ockam era cunoscută lui Wittgenstein? Sau chiar că întreaga logică a Evului Mediu îi era familiară? Nu putem face o astfel de afirmație, cu atît mai mult cu cît deviza lui Ockam a devenit în filosofie un fel de aforism pe care Wittgenstein putea să-l cunoască fără a-l fi citit pe Ockam. Această lege de *economie a gîndirii* (care fusese enunțată și de alți scolastici) se găsește în tratatul lui Ockam purtînd titlul *Super quatuor libros sententiarum* (Lion, 1495): *Nunquam ponendo est pluralitas sine necesitate* („Niciodată nu trebuie să întrebuințăm mai mult fără necesitate"). Sau sub o altă formă, cum apare în tratatul *Summa totius logicae*: *Frustra fit per plura, quod potest fieri per pauciora* („Este nefolositor să faci prin mai mult, ceea ce poți să faci prin mai puțin").

Este evident că nu putem trage nici o concluzie dacă, da sau nu, Wittgenstein cunoștea logica lui Ockam. Dar există un mare logician scolastic, Petrus de Allyaco, a cărui concepție despre paradoxe și soluția lor este aproape identică cu aceea a lui Wittgenstein. (V. supra in volum.) Să fie numai o coincidență? Wittgenstein însuși refuză să indice sursele ideilor sale. El scrie în prefața *Tractatus*-ului: „Cît de aproape sînt eforturile mele față de cele ale altor

filosofi, nu eu sînt acela care voi decide. Într-adevăr, ce am scris aici nu are nici o pretenție de noutate în punctele de detalii și de aceea nu dau nici o sursă; din cauză că îmi este indiferent dacă ceea ce am gîndit a mai fost gîndit înaintea mea de altcineva." Această afirmație, a cărei sinceritate este evidentă, face dificilă încercarea de a descoperi legătura de inspirație cu ideile logicianului scolastic citat mai înainte.

Încercarea noastră are un întreit scop:

1) De a arăta că Wittgenstein oferă o soluție antinomiilor logico-matematice, care, după părerea noastră, nu a fost luată în considerare pînă acum, numai din cauza conciziunei ei.

2) Să arate că această soluție nu respinge teoria tipurilor (a lui Russell), ci o interpretează numai în modul cel mai simplu.

3) Să explice că soluția lui Wittgenstein este identică, în esența ei, cu soluția dată paradoxelor numite *Insolubilia* de celebrul logician scolastic Petrus de Allyaco (Pierre d'Ailly).

Vom mai adăuga că aceia care s-au ocupat de exegeza lui Wittgenstein au neglijat această problemă și soluția dată de el. Numai un autor, și anume Max Black (în lucrarea *A Companion to Wittgenstein's Tractatus*), a acordat oarecare atenție acestei probleme, dar numai în legătură cu teoria tipurilor. George Pitcher (în *The Philosophy of Wittgenstein*) nici nu citează problema paradoxelor ca pe o problemă tratată de Wittgenstein, sau soluția oferită de el.

II. TEORIA SIMBOLISMULUI

Chiar din „Prefață" la *Tractatus,* Wittgenstein indică scopul lucrării sale, care este „de a trasa o limită expresiei gîndirii", pentru că problemele filosofiei sînt formulate în mod eronat, după el, și metoda de a le formula se bazează pe neînțelegerea logicii limbajului nostru. Mai departe, Wittgenstein scrie:

3.323 În limbajul vieții obișnuite se întîmplă adesea ca același cuvînt să semnifice în două moduri diferite — și de aceea aparține la două simboluri diferite — sau ca două cuvinte, care semnifică în moduri diferite, să fie aplicate în același mod în propoziție.

3.324 Astfel se nasc cele mai fundamentale confuzii (de care este plină întreaga filosofie).

3.325 Pentru a evita aceste erori, trebuie să întrebuințăm un simbolism care le exclude, neîntrebuințînd același semn pentru simboluri diferite și neîntrebuințînd semne în același mod cînd ele semnifică în sensuri diferite. Un limbaj de semne, deci, care ascultă de regulile gramaticii *logice* — de sintaxa logică.

(Simbolismul logic al lui Frege și Russell este un astfel de limbaj, care, totuși, nu exclude erorile.)

Sîntem astfel în prezența unei teorii generale a sofismelor. Mai întîi, Wittgenstein face o subtilă distincțiune între semn și simbol. Un semn poate fi un simbol, dar poate fi în mod simplu numai un semn. Un semn devine un simbol numai cînd are întrebuințare semnificativă (3.326). „Semnul determină o formă logică numai împreună cu aplicația lui logico-sintactică." (3.327).

Cu alte cuvinte, și pentru a rezuma ideile lui Wittgenstein, putem să construim o gramatică logică a semnelor, fără a lua în considerație semnificațiile lor simbolice, pentru că acestea trebuie să fie vide de orice conținut. Sau, cu vorbele lui Wittgenstein: „În sintaxa logică înțelesul unui semn nu trebuie să joace niciodată vreun rol; ea trebuie să fie stabilită fără vreo mențiune relativă la *semnificația* vreunui semn; ea trebuie să presupună numai descrierea expresiilor" (3.33). Aceasta este concepția lui Wittgenstein despre simbolism și sintaxa logică. Și ea pare incontestabilă. O logică formală (logica simbolică) trebuie într-adevăr să neglijeze orice conținut, altminteri nu mai este formală. Și aceasta este condiția pe care Wittgenstein o pune oricărui sistem logic de semne.

Ideile acestea ale lui Wittgenstein se găsesc și în lucrarea lui Aristotel *De Sophisticis elenchis* (165 a 7; 169 a). Iată ce spune Aristotel: „Unul dintre motive, cel mai natural și cel mai obișnuit [cauză a sofismelor], este cel care ține de întrebuințarea cuvintelor, fiindcă într-o discuție nu este posibil să aducem lucrurile înseși, ci trebuie să ne folosim, în locul lor, de cuvintele care le simbolizează. Astfel noi credem că ceea ce este valabil pentru cuvinte este valabil și pentru lucruri [. . .]. Numărul cuvintelor este finit, ca și numărul ideilor, în timp ce numărul lucrurilor este infinit. De aceea, aceeași idee și același cuvînt trebuie să desemneze mai multe lucruri [. . .]. Aceia care nu cunosc puterea de semnificație a cuvintelor fac paralogisme." Aristotel adaugă mai departe: „Este foarte greu să deosebim ce fel de lucruri sînt semnificate de același cuvînt și ce fel de lucruri sînt semnificate de cuvinte diferite. Cine poate să facă această deosebire este foarte aproape de adevăr."

III. RESPINGEREA TEORIEI TIPURILOR?

Cea mai importantă soluție propusă pentru paradoxele logico-matematice este aceea dată de Bertrand Russell și numită chiar de el „teoria tipurilor". După această teorie, nici o clasă nu poate fi formată dacă ea conține membri care nu pot fi definiți decît cu ajutorul clasei ai căror membri sînt (principiul cercului vicios). Sau, pentru a exprima lucrul acesta altfel, o clasă este o entitate logică care presupune o funcție propozițională $\varphi(x)$; notînd clasa cu $\hat{x}(\varphi x)$, expresia $\varphi[\hat{x}(\varphi x)]$ este fără sens, fiindcă argumentul unei funcții nu poate fi clasa determinată de însăși funcția dată. Astfel de expresii sînt eliminate de Russell ca fiind „fără sens" *(meaningless)*, în virtutea principiului cercului vicios. Ca urmare, Russell a fost obligat să clasifice conceptele cu ajutorul „tipului" lor: obiecte, proprietăți ale obiectelor, proprietăți ale proprietăților etc. O astfel de diviziune a conceptelor conduce repede la concluzia că nu este posibil să se aplice o proprietate de un tip oarecare, ei însăși, ci numai unui concept de un tip imediat inferior.

Wittgenstein crede însă că teoria lui Russell este eronată în *forma aceasta*. Care sînt motivele lui Wittgenstein pentru a respinge forma acestei teorii, așa cum a fost prezentată de Russell? Ele sînt expuse în mod clar în propozițiile 3.331, 3.332, 3.333 din *Tractatus*, și pot fi împărțite în două argumente:

1) „Eroarea lui Russell se arată în faptul că enunțînd regulile semnelor, el trebuie să vorbească despre semnificația acestor semne." Aici Wittgenstein

insistă asupra imposibilităţii de fapt a unui semn formal de a vorbi despre conţinutul lui. Într-adevăr, dacă problema este de a constitui o sintaxă a semnelor goale de orice conţinut, înţelesurile lor posibile nu pot fi luate în considerare, căci altminteri natura formală a acestui sistem ar fi alterată.

După ce a explicat astfel natura erorii lui Russell, Wittgenstein aduce un alt argument, de natură diferită, a doua obiecţie împotriva teoriei russelliene a tipurilor:

2) „Nici o propoziţie nu poate spune ceva despre ea însăşi, din cauză că semnul propoziţional nu poate fi conţinut în el însuşi (aceasta este întreaga teorie a tipurilor)".

„O funcţie nu poate fi propriul ei argument, deoarece semnul funcţional conţine deja prototipul propriului său argument, şi nu se poate conţine singur".

Această respingere a „auto-referinţei" este punctul central al concepţiei lui Wittgenstein în problema paradoxelor. Dar el este şi în strînsă legătură cu primele idei din *Tractatus*. Această lucrare începe prin a stabili noţiunea de „imagine" a faptelor, imaginea reprezentînd faptele în spaţiul logic şi fiind un model al realităţii (2.1, 2.11). Totuşi, imaginea este de asemenea un fapt, dar de data aceasta avem de-a face cu un „fapt logic". O imagine este o conexiune de elemente şi această conexiune este o structură. Posibilitatea acestei structuri se numeşte forma de reprezentare a imaginii. Imaginea poate să reprezinte orice realitate a cărei formă o are (2.1711). Dar el adaugă, şi aceasta este cea mai importantă observaţie a lui Wittgenstein cu privire la paradoxe:

„2.172 Imaginea nu poate, totuşi, să reprezinte forma ei de reprezentare; ea numai o arată.

2.173 Imaginea reprezintă obiectul ei din afară.

2.174 Dar imaginea nu poate să se plaseze în afara formei ei de reprezentare."

Putem acum să sesizăm ideea lui Wittgenstein: (1) Pentru a funda teoria tipurilor, Bertrand Russell a fost obligat să vorbească despre lucrurile pe care le reprezintă simbolurile, şi aceasta este eroarea lui, deoarece nu a rămas pe terenul pur formal al sintaxei logice. (2) Ceea ce este valabil, în teoria tipurilor, este că „nici o propoziţie nu poate spune nimic despre ea însăşi, din cauză că semnul propoziţional nu poate fi conţinut în el însuşi" (3.332).

Din această concepţie rezultă că Wittgenstein nu respinge teoria tipurilor, ci numai o interpretează. Propoziţia 3.332 arată care este ideea lui esenţială. El respinge propoziţiile care au autoreferinţă şi îşi întemeiază atitudinea lui pe aserţiunea că nici un semn propoziţional nu poate fi conţinut în el însuşi. Aceasta este însăşi baza teoriei tipurilor, şi el însuşi adaugă că „aceasta este întreaga teorie a tipurilor". De aceea nu se poate pune chestiunea, pentru el, de a respinge teoria tipurilor, ci numai de a o reduce la baza ei logico-formală, ceea ce Wittgenstein a exprimat în propoziţiile de mai sus.

IV. CRITICA LUI MAX BLACK

Max Black a criticat poziţia luată de Wittgenstein faţă de teoria tipurilor, dar critica lui nu este ireproşabilă, după cum vom vedea imediat. În lucrarea *A Companion to Wittgenstein's Tractatus*, Black formulează următoarele obiecţii împotriva respingerii teoriei tipurilor de către Wittgenstein.

1) Motivele lui Wittgenstein pentru a elimina teoria, scrie Black— pentru că formularea ei a împins pe Russell să vorbească despre înţelesul semnelor (3.331) — nu rezistă unei examinări atente. Principiul la care apelează Wittgenstein în mod implicit, anume că referinţa la înţeles trebuie să fie absentă din sintaxa logică (3.33), pretinde mai multă apărare decît ne oferă el, dar, în orice caz, el aproape trece cu vederea posibilitatea unei versiuni pur sintactice a teoriei tipurilor (pentru care se poate vedea lucrarea lui Alonzo Church, *Introduction to Mathematical Logic*).

2) Motivul lui Wittgenstein de a exclude autoreferinţa nu este convingător în mod imediat: nu este clar de ce semnul propoziţional trebuie „să se includă în el însuşi" pentru a fi expresia unei propoziţii despre propria lui semnificaţie. Dacă pot să vorbesc despre un om fără a folosi un nume, de ce nu aş putea să vorbesc despre semnificaţia unei propoziţii, utilizînd o descriere oarecare care este o parte a semnului propoziţional?" *(op. cit.*,p. 145—147.*)*

Max Black citează apoi pe Wittgenstein: „O propoziţie nu poate să apară în ea însăşi. Acesta este adevărul fundamental al teoriei tipurilor." (L. Wittgenstein, *Notes on Logic,* 106 (2); M. Black, *op. cit.*, p. 147.)

Să examinăm aceste afirmaţii, începînd cu citatul de mai sus, din Wittgenstein. Această propoziţie confirmă o dată mai mult opinia noastră că Wittgenstein nu respinge teoria tipurilor, ci numai formularea lui Russell în termenii unei ierarhii de entităţi logice. Cu privire la faptul că Wittgenstein nu a cunoscut „formularea" pur sintactică a acestei teorii, aşa cum a fost dată de Church, trebuie să afirmăm explicit că Wittgenstein a refuzat să admită un metalimbaj (ale cărei părţi sînt sintaxa logică şi semantică). Gilles Granger a arătat în mod clar acest lucru în articolul său *Wittgenstein et la Métalangue* („Revue Internationale de Philosophie", 1969, 88—89). Wittgenstein spune în *Philosophische Bemerkungen* (1.6) că pentru a exprima proprietăţile unui limbaj trebuie să ieşim din limbaj şi aceasta este imposibil: „Nu pot să ies prin limbă, afară din limbă", scrie el. Profesorul Granger traduce aceasta astfel: „Limba nu poate exprima propriile ei proprietăţi". Prin urmare, nu se poate opune „formularea" sintactică a lui Church (a teoriei tipurilor), lui Wittgenstein, din cauză că o astfel de „formulare" este imposibilă în principiu, în concepţia lui, şi de aceea ea este iluzorie. În sfîrşit, motivul de a exclude autoreferinţa apare evident dacă nu omitem nimic în seria de idei logice din *Tractatus*.

Am citat deja propoziţiile 2.171 şi 2.172, care afirmă de la început că între *„Object"* şi *„Bild"* (imagine) există o relaţie între ceea ce este reprezentat şi ceea ce reprezintă şi de aceea reprezentarea a ceva nu poate să fie propria ei reprezentare, din cauză că, în acest caz, unul din termenii acestei relaţii nu există. Această problemă (a „reprezentării") este foarte veche şi poate fi găsită şi la Platon, la Aristotel şi în special la stoici, dar ea se găseşte la unii logicieni din Evul Mediu chiar în forma pe care i-a dat-o Wittgenstein, după cum vom vedea.

Pe scurt, şi pentru a vorbi în limbajul lui Wittgenstein, vom spune că pentru a exprima ceva trebuie să existe ceva exprimabil şi un sistem de semne care-l exprimă. Cei doi poli ai acestei probleme sînt lucrul exprimat şi expresia lui. Dar atunci expresia nu poate fi propria ei expresie, prin definiţie. Prin urmare, un semn nu poate fi propriul lui semn, şi un simbol nu poate fi propriul lui simbol, din cauză că ideea de semne sau simboluri pretinde, prin definiţie, doi termeni diferiţi.

Afirmația lui Max Black, că „Motivul lui Wittgenstein pentru a exclude autoreferința nu este convingător în mod imediat", nu consideră problema în propria ei generalitate. Argumentul lui Wittgenstein se bazează pe concepția contemporană a logicii formale. Știința logicii este știința formelor vide de orice conținut și deci de orice semnificație. De aceea, Wittgenstein spune că atunci cînd stabilim regulile semnelor nu trebuie să vorbim despre semnificația acestor semne. Autoreferința este respinsă de Wittgenstein în virtutea unui principiu mai general, care este de fapt principiul logicii matematice actuale: nici un semn nu poate spune nimic despre ceva, de aceea el nu poate spune nimic nici despre el însuși. Dacă admitem autoreferința, înfrîngem chiar concepția logicii formale moderne: „semnificația unui semn nu trebuie niciodată să joace vreun rol" (3.33).

Dinstincția dintre semn și semnificația lui, care nu trebuie să fie confundate, fusese deja făcută de stoici. Ei au împărțit dialectica în două mari capitole: (1) știința „a ceea ce exprimă" (σημαῖνον, *verbum)* și (2) știința „a ceea ce este exprimat" (σημαινόμενον, *significatio)*. Concepția lui Wittgenstein nu cere decît să nu se confunde *verbum* cu *significatio*.

V. CONCEPȚIA LUI WITTGENSTEIN DESPRE PARADOXE

Ne vom ocupa de soluția propriu-zisă dată de Wittgenstein în problema paradoxelor. Pînă acum această soluție nici nu a fost considerată ca o soluție. Mai întîi de toate, vom observa că în problema paradoxelor logico-matematice atitudinile adoptate pot fi clasificate în două categorii: (1) soluții filosofice și (2) soluții pur logice. Vom numi o soluție *filosofică* a unui paradox orice soluție care încearcă să explice contradicția dintr-o astfel de problemă, printr-o nouă axiomă (sau idee), care nu aparține sistemului logic în care a apărut. Astfel de soluții au fost date în trecut de către filosofii eleați faimoaselor lor paradoxe; și Kant a explicat antinomiile rațiunii pure tot prin soluții filosofice. Nu este nevoie să dovedim caracterul filosofic al atitudinii logico-matematice actuale, deoarece acesta a fost recunoscut de cei mai reprezentativi autori. Bertrand Russell a spus că „În acest sens și prin faptul că tratează probleme nu încă rezolvate, logica matematică are un caracter filosofic" *(Introduction to Mathematical Philosophy)*. În *The Present State of Investigations on the Foundations of Mathematics* (Varșovia, 1955), A. Mostowski scrie: „Aceste probleme sînt de natură filosofică și nu ne putem aștepta ca ele să fie rezolvate numai în limitele matematicilor și aplicînd numai metode matematice".

Cu privire la soluția pur *logică* a sofismelor sau a paradoxelor, atitudinea lui Aristotel era că un paradox este un sofism, deci este numai o eroare de logică. Toți logicienii de după Aristotel au adoptat aceeași atitudine; în timpul Evului Mediu, logicienii scolastici nu au renunțat niciodată să caute soluția logică a sofismelor și a paradoxelor. Printre logicienii și matematicienii din timpul nostru, a căror atitudine a rămas cea clasică față de paradoxele matematice, vom menționa pe J. Richard și H. Poincaré, iar mai tîrziu pe Ch. Perelman și M. Barzin. Putem cita încă pe H. Behmann, a cărui soluție a paradoxelor, bazată pe condiția lui Pascal a definiției, este o soluție logică.

Wittgenstein completează seria lungă de logicieni care au adoptat poziția lui Aristotel. În adevăr, el arată în *Tractatus* că nici o contradicție for-

mală nu poate fi concepută. Am reamintit că el începe cu ideea de „imagine" a faptelor.

Să reluăm firul ideilor lui din *Tractatus*:

„2.18 Ceea ce orice imagine, de orice formă, trebuie să aibă în comun cu realitatea pentru a putea să o reprezinte — corect sau fals — este forma logică, adică forma realităţii.

2.181 Dacă forma de reprezentare este forma logică, atunci imaginea se numeşte o imagine logică.

2.19 Imaginea logică poate să reprezinte lumea.

2.2 Imaginea are forma logică de reprezentare în comun cu ceea ce reprezintă.

2.201 Imaginea reprezintă realitatea prin aceea că reprezintă o posibilitate a existenţei şi nonexistenţei a faptelor atomice.

3. Imaginea logică a faptelor este gîndirea.

3.001 „Un fapt atomic este gîndibil" înseamnă: noi putem să-l imaginăm.

3.02 Gîndirea conţine posibilitatea de a descrie stările de fapte pe care le gîndeşte. Ce este gîndibil este de asemenea posibil.

3.03 Nu putem gîndi nimic din ceea ce ar fi nelogic, pentru că atunci ar trebui să gîndim nelogic.

3.032 A prezenta în limbă ceva care „contrazice logica" este tot atît de imposibil cum ar fi în geometrie să reprezentăm prin coordonatele ei o figură care contrazice legile spaţiului; sau să dăm coordonatele unui punct care nu există.

3.0321 Am putea să reprezentăm în spaţiu un fapt atomic care contrazice legile fizice, dar nu unul care contrazice legile geometriei."

Cu aceasta, poziţia lui Wittgenstein faţă de problema paradoxelor este complet clarificată: este imposibil să exprimăm o contradicţie în spaţiul logico-formal. Astfel autorul *Tractatus*-ului îşi găseşte locul lui pe linia logicienilor clasici, care începe de la Aristotel şi sfîrşeşte cu Wittgenstein. Contradicţiile sînt numai erori de logică şi, după cum am spus deja, ele sînt datorate unei confuzii între semne sau între simboluri. „Pentru a evita aceste erori — scrie el — trebuie să utilizăm un simbolism care le exclude, neîntrebuinţînd acelaşi semn în simboluri diferite şi neîntrebuinţînd semne în acelaşi mod cînd ele semnifică în moduri diferite" (3. 325). Aceasta este concepţia generală a lui Wittgenstein despre sofisme şi paradoxe.

VI. SOLUŢIA LUI WITTGENSTEIN

Să rezumăm acum aceste consideraţii, care ar fi putut fi completate cu propoziţiile 4.1272, 5.251 şi 5.252.

1) Wittgenstein se menţine pe poziţia clasică în problema paradoxelor, după care, cum am menţionat, orice contradicţie de felul acesta nu poate fi decît o eroare de logică.

2) Imaginea conţine forma realităţii, dar nu vorbeşte despre această formă, ci numai o reflectă.

3) Nici un semn nu poate fi propriul lui semn; nici un simbol nu poate fi propriul lui simbol. Așadar, nici o propoziție nu poate să spună ceva despre ea însăși, din cauză că semnul propozițional nu poate fi conținut în el însuși. O funcție nu poate fi propriul argument, deoarece semnul funcțional conține deja prototipul propriului ei argument și nu se poate conține singur (3.33).

Cu aceste idei Wittgenstein rezolvă paradoxele. Conciziunea textului și forma lui aforistică au împiedicat ca acestei soluții să i se dea importanța cuvenită. De aceea, nimeni nu a considerat pînă acum că soluția lui Wittgenstein este, în realitate, o soluție.

Iată soluția lui, așa cum apare în textul din *Tractatus*:

3.333 Dacă, de exemplu, presupunem că funcția $F(fx)$ ar putea fi propriul ei argument, atunci ar exista și funcția „$F[F(fx)]$", și în această expresie funcția exterioară F și funcția interioară [față de paranteză] trebuie să aibă semnificații diferite. Ceea ce au în comun cele două funcții este numai litera „F" care, în ea însăși, nu semnifică nimic.

Acest lucru devine clar imediat, dacă în loc de „$F[F(u)]$" scriem „$(\exists \varphi) : F(\varphi u) \cdot \varphi u = Fu$".

Cu aceasta, paradoxul lui Russell dispare.

Să explicăm această soluție care, e drept, este mult prea concisă. Vedem că pentru Wittgenstein dacă o funcție ar putea fi propriul ei argument, atunci expresia „$F[F(x)]$" ar putea fi formată, dar în acest caz amîndouă literele F care apar în această expresie ar semnifica fiecare ceva diferit și, de aceea nimic. Pentru a evita erorile pe care le-am indicat, Wittgenstein aplică aici principiul general că același simbol nu poate să reprezinte lucruri diferite în același timp. Mai mult, Wittgenstein atrage atenția că litera F, prin ea însăși, nu semnifică nimic.

H. Behmann a remarcat, la rîndul lui, problema literei F, în funcția care devine propriul ei argument, și a conchis că F nu era definit. În articolul său *Zu den Widersprüchen der Logik und Mengenlehre* („Jahresbericht der deutschen math. Vereinigung", Band 40, 1931), Behmann a arătat că în definiția $F(\varphi) = \sim \varphi(\varphi)$ care provoacă paradoxul, F este numai o abreviere și, ca atare, nu este necesară; prin urmare, ea poate fi ușor eliminată prin înlocuirea ei cu semnul care a fost întrebuințat pentru definiția lui. Aceasta este tocmai condiția lui Pascal a definiției. Dar dacă încercăm să eliminăm F din expresia de mai sus, obținem $\sim F(F)$, și dacă mergem mai departe avem $\sim\sim F(F)$, și așa mai departe. Cu alte cuvinte, după Behmann, semnul abreviativ F a fost incorect introdus, deoarece poate fi eliminat, nu există semne care-l definesc și deci F nu este definit.

Cu toate că Behmann este foarte aproape de Wittgenstein, totuși, autorul *Tractatus*-ului nu a utilizat acest argument. În loc de condiția pascaliană a definiției, el și-a bazat argumentarea lui pe o altă condiție a definiției, fără a o afirma explicit: „O definiție nu trebuie să fie făcută *idem per idem*, adică nu trebuie să fie tautologică; nu se poate defini definitul prin definit — *definiendum per definiendum*". O formă mai dezvoltată a falsei definiții *idem per idem* este *circulus in definiendo*, ori *diallela*: un lucru este definit prin altul, dar fiecare din ele este definit prin elemente aparținînd celuilalt. De exemplu: „Reprezentările sînt complexe de senzații" și „senzațiile sînt elemente ale reprezentării". Considerăm că Wittgenstein se servește în mod

implicit de condiţia aceasta a definiţiei, cînd ne spune că o funcţie nu poate fi propriul ei argument, altfel semnul funcţiei rămîne în el însuşi şi deci nu este definit. Distincţia între semnul F şi semnul f, în expresia $F(fx)$, arată că semnul F este definit în locul pe care-l ocupă (ca funcţie propoziţională) de semnul f, şi cînd construim expresia $F[F(fx)]$, F este definit ca funcţie cu ajutorul lui F însuşi şi de aceea definiţia degenerează într-o definiţie *idem per idem*.

Să rezumăm discuţia noastră. Wittgenstein afirmă că nici un semn nu poate fi propriul lui semn, nici un simbol propriul lui simbol, nici o propoziţie nu poate vorbi despre ea însăşi, nici o funcţie propoziţională nu poate fi propriul ei argument. Din punctul de vedere al condiţiilor definiţiei, care împiedică definiţiile *idem per idem*, afirmaţia lui Wittgenstein înseamnă că dacă un semn nu este întrebuinţat, el este nesemnificativ; cînd este întrebuinţat, el primeşte un sens şi acest sens este definit cu ajutorul altor semne. Pentru a evita o definiţie *idem per idem*, trebuie ca un semn să nu fie propriul lui semn, adică, să nu fie definit *idem per idem;* semnul propoziţional nu poate vorbi despre el însuşi, altfel ar putea să se definească singur. În sfîrşit, funcţia propoziţională nu poate fi propriul ei argument, deoarece semnul funcţiei propoziţionale s-ar defini singur în acest caz ca un semn de funcţie propoziţională, şi aceasta ar fi o definiţie *idem per idem*.

VII. RECAPITULARE

Wittgenstein rezolvă problema paradoxelor, bazîndu-se pe două principii care constituie de fapt două aspecte ale aceleiaşi soluţii.

1. *Regula semnelor diferite*. Nu putem să întrebuinţăm acelaşi semn în simboluri diferite sau semne diferite pentru acelaşi simbol. Am văzut care este justificarea logică a acestei reguli. Ea este suficientă pentru a exclude paradoxele. În adevăr, după cum se ştie, expresiile care conduc la contradicţii au, în general, forma următoare:

$$\alpha\in\alpha = \text{„}\alpha \text{ este un element al mulţimii } \alpha\text{"}$$

$$\sim\alpha\in\alpha = \text{„}\alpha \text{ nu este un element al mulţimii } \alpha\text{"}$$

sau forma:

$$\varphi(\varphi) = \text{„}\varphi \text{ are predicatul } \varphi\text{"}$$

$$\sim\varphi(\varphi) = \text{„}\varphi \text{ nu are predicatul } \varphi\text{"}.$$

Regula lui Wittgenstein exclude posibilitatea de a forma astfel de expresii. Semnul α este pus de fapt pentru o mulţime şi în acelaşi timp pentru un element al acestei mulţimi, adică pentru două lucruri diferite, care au funcţii logice diferite. La fel, semnul φ din expresia $\varphi(\varphi)$ sau $\sim\varphi(\varphi)$ este întrebuinţat ca argument şi ca predicatul lui, adică pentru două idei logice diferite. Astfel, după Wittgenstein, aceste expresii nu sînt admisibile.

2. Regula respingerii autoreferinţei. Excluzînd autoreferinţa, Wittgenstein elimină posibilitatea ca un semn să apară într-un sistem formal definindu-şi el însuşi funcţia lui logică sau valoarea lui logică. Am văzut că această regulă are o justificare perfect logică şi că, dacă nu o luăm în considerare, obţinem definiţii eronate — *idem per idem* — care conduc la contradicţii. În adevăr, expresia $\varphi(\varphi)$, care intenţionează să desemneze o funcţie

propoziţională, este definită cu ajutorul argumentului φ, adică cu semnul întrebuinţat pentru funcţia φ.

Russell defineşte funcţia propoziţională astfel: „Fie φx o expresie conţinînd o variabilă, în aşa fel că ea devine o propoziţie cînd lui x i se atribuie o semnificaţie bine determinată. Atunci φx se numeşte o funcţie propoziţională." *(Principia Mathematica,* I, p. 15; 1910.*)* Simbolul x este argumentul funcţiei propoziţionale. În ea însăşi, o funcţie propoziţională nu reprezintă nimic, este numai o variabilă. Funcţia propoziţională este φx, unde argumentul este x. Pentru a pune în evidenţă variabila-funcţie luată ca o entitate separată, Russell scrie: $\varphi\hat{x}$. Într-o funcţie există, deci, prin definiţia ei, două variabile: argumentul x şi funcţia $\varphi\hat{x}$.

Să considerăm acum funcţia propoziţională particulară $\varphi(\hat{\varphi})$. Funcţia în ea însăşi este $\varphi(\hat{\varphi})$. Prin urmare, variabila $\varphi(\hat{\varphi})$ este definită ca o expresie care conţine un singur constituent nedeterminat φ. Cu alte cuvinte variabila $\varphi(\hat{\varphi})$ este definită cu ajutorul variabilei φ, adică printr-o definiţie *idem per idem.* Aşadar, expresiile de forma $\varphi(\varphi)$ şi $\sim \varphi(\varphi)$, sau $\alpha\epsilon\alpha$ şi $\sim \alpha\epsilon\alpha$ nu pot fi construite, ele fiind datorite unor definiţii eronate *idem per idem.* Acesta este, după părerea noastră, fundamentul logic al regulei care respinge autoreferinţa.

VIII. WITTGENSTEIN ŞI PETRUS DE ALLYACO

Vom sublinia acum un fapt cu totul deosebit, pe care nu ne putem încumeta să-l explicăm, din cauză că ne lipsesc probele.

Soluţia lui Wittgenstein a paradoxelor logico-matematice a fost dată deja, în Evul Mediu, de Petrus de Allyaco (1350—1420?). Printre lucrările lui Petrus găsim un tratat special dedicat studiului acestor *Insolubilia,* care a fost publicat împreună cu alte două lucrări ale sale sub titlul: *Destructiones modorum significandi. Conceptus et insolubilia secundum viam nominalium magistri Petri de Allyaco.*

Titlul insuşi arată că Petrus era un ockamist, adică un nominalist.

Iată cum începe el tratatul său asupra paradoxelor *Insolubilia:* „Numeroşi sînt aceia care au avut diferite opiniuni asupra aşa-numitelor insolubile. Căutînd o ieşire din această dificultate şi pentru a o respinge, nu am găsit totuşi calea pentru a ajunge la o demonstraţie satisfăcătoare pentru mintea mea *(meae menti).* De aceea voi încerca o explicaţie probabilă prin care trebuie să apară rădăcina dificultăţii *(radix difficultatis)* şi o soluţie radicală a problemei." După opinia lui, există două feluri de dificultăţi în această problemă: (1) o dificultate generală, privind adevărul şi falsitatea propoziţiilor; (2) o a doua dificultate, de natură specială, privind propoziţiile de un anume tip care au reflectare asupra lor înseşi — *propositiones habentes reflexionem supra se.* Petrus de Allyaco acceptă diviziunea lui Ockam a propoziţiilor în trei categorii: (1) *propositio mentalis*; (2) *propositio vocalis*; (3) *propositio scripta* (această diviziune îşi are originea în *Analiticele* lui Aristotel). Ultimele două propoziţii sînt subordonate direct şi imediat propoziţiei mentale, după el, dar ele nu sînt subordonate una alteia cum au susţinut unii. Propoziţia mentală propriu-zisă *(proprie dicta)* nu este adevărată sau falsă

din cauză că ar semnifica adevărul sau falsitatea din afară. Cu alte cuvinte, adevărul sau falsitatea unei propoziţii mentale se găsesc în esenţa mentală a judecăţii, adică în sesizarea mentală a unei stări obiective de lucruri. Şi aici apare ideea importantă a lui Petrus: numai *propositio mentalis*, fiind deasupra diferenţelor lingvistice, are un sens esenţial care îi dă posibilitatea de a fi adevărată sau falsă.

Care dintre propoziţii are reflexie asupra ei însăşi, *propositio habens reflexionem supra se*, şi prin ce se deosebeşte de *propositio mentalis?* Iată opinia lui: „Propoziţiile vocale sau scrise reprezintă ceva, reprezentarea a ceva poate fi făcută în două moduri: obiectiv şi formal *(obiective et formaliter)*. Nici un lucru creat nu poate fi propria şi distincta lui cunoaştere formală. Nici o propoziţie vocală sau scrisă nu se poate reprezenta pe ea însăşi sau altceva în mod formal" (... *Nulla res creata potest esse propria et distincta cognitio formalis sui ipsius. Nulla propositio vocalis vel scripta potest significare se ipsam vel aliquid aliud formaliter.)*

Dar am găsit în *Tractatus*-ul lui Wittgenstein propoziţiile următoare: „Imaginea nu poate totuşi să reprezinte forma reprezentării; ea numai indică" (2.172). „Imaginea nu se poate plasa în afara formei ei de reprezentare" (2.174).

Pe scurt, Petrus de Allyaco face următoarea distincţie naturală: propoziţia mentală poate fi adevărată sau falsă, după cum reprezintă o stare reală de lucruri sau nu, dar nu poate afirma nimic despre ea însăşi; ea nu se poate declara ea însăşi adevărată sau falsă. Sau, după cum spune autorul insuşi: *Nulla propositio mentalis proprie dicta potest significare se ipsam esse veram... nec potest habere reflexionem supra se.* Cu toate acestea, putem pronunţa sau să scriem orice propoziţie care atribuie o valoare de adevăr unei propoziţii mentale, ca, de exemplu: *Aliqua propositio mentalis est falsa* („O oarecare propoziţie mentală este falsă").

Petrus crede că a rezolvat problema „insolubilelor" numai ţinînd seama de această distincţie, fiindcă el este convins că a găsit propoziţiile care se falsifică singure — *falsificari se ipsas*. După el, întreaga această „insolubilitate" *(insolubilitas)* nu alterează judecata mentală, dar poate să apară în propoziţiile mentale improprii şi în special în propoziţiile vocale sau scrise. Soluţia „insolubilelor" constă astfel în a remarca că „prin consecinţa unei paralelizări făcută între propoziţia orală sau scrisă şi propoziţia mentală corespunzătoare, aşa-numita insolubilă pare uneori falsă şi uneori adevărată, dar este numai aparentă". Confuzia dintre propoziţiile mentale şi propoziţiile orale este cauza acestor paradoxe.

IX. CONCLUZII

Dacă vom compara acum soluţia dată de Wittgenstein paradoxelor logico-matematice, cu aceea oferită de alţi logicieni contemporani, trebuie să facem o observaţie. Dacă Wittgenstein, ca şi Petrus de Allyaco, doreşte să arate unde este nodul logic al problemei, în ce constă exact eroarea de logică, şi astfel să dea o explicaţie logică a paradoxului, o bună parte dintre logicienii contemporani, pe de altă parte, în prezenţa unor astfel de contradicţii, încearcă

să stabilească convenţii pentru a le evita. Aceşti logicieni actuali nu mai voiesc să elucideze dificultatea logică; ei nu mai caută adevărul regulilor logice, ei doresc numai să aibă reguli practice, pentru a evita dificultatea. Iată, de exemplu, ce spune Hans Reichenbach despre aceste reguli (teoria tipurilor sau altele): „S-a pus chestiunea dacă este necesar să introducem aceste reguli. Un lucru pare clar: singura motivare pe care o putem da acestor reguli este că ele exclud contradicţia. Nu se pune problema dacă teoria tipurilor sau teoria nivelelor de limbaj este adevărată." *(Elements of Symbolic Logic,* New York, 1948.*)*

Este acum evident cît de clară şi logică este soluţia lui Wittgenstein, pentru că el voia să explice în mod logic contradicţia. Într-adevăr, noi înţelegem foarte bine ce înseamnă afirmaţia logicianului scolastic: „Nici un lucru creat nu se poate reprezenta pe el însuşi în mod distinct şi formal". Aceasta este o chestiune de logică, şi nu o convenţie prohibitivă. Caracterul logic al unei astfel de soluţii a fost înţeles de un singur logician, la începutul veacului nostru, Ludwig Wittgenstein, care — fără să facă vreo aluzie că ar fi cunoscut această soluţie de la logicienii medievali — a exprimat exact şi aproape în aceiaşi termeni ideile lui Petrus de Allyaco. Desigur, conciziunea soluţiei lui face înţelegerea ei dificilă şi aici obiecţia lui Max Black este îndreptăţită: „Examenul sumar făcut de Wittgenstein paradoxelor care au condus la teoria tipurilor este nesatisfăcător, aşa cum conciziunea lui făcea să fie de aşteptat" *(A Companion to Wittgenstein's Tractatus,* p. 146*)*.

Privitor la concepţia lui Wittgenstein şi Petrus de Allyaco despre paradoxe, care are aceeaşi bază logică, nu avem în momentul de faţă suficiente elemente pentru a afirma că autorul *Tractatus*-ului ar fi avut vreo cunoştinţă despre tratatul asupra „Insolubilelor" al lui Allyaco. Poate că e mai sigur să considerăm că dictonul francez bine cunoscut este adevărat: *„Les beaux esprits se rencontrent"*.

The Journal of History of Philosophy, 2, Washington-San Diego, U.S.A., 1974.

Soluţiile contemporane şi scolastice ale antinomiilor logico-matematice

INTRODUCERE

Importanţa extraordinară pe care a luat-o problema aşa-numitelor „paradoxe logico-matematice", atît pentru fundamentele matematicilor, cît şi pentru logică, este bine cunoscută. Apariţia acestor contradicţii în domeniul celor mai riguroase ştiinţe a zguduit bazele acestora, provocînd o criză serioasă nu numai în aria lor proprie, ci şi în zona însăşi a logicii.

Au fost propuse diverse soluţii ale acestor antinomii, dintre care cea mai larg acceptată a fost aceea a lui Bertrand Russell. În articolul de faţă dorim să arătăm că principalele soluţii propuse astăzi pentru aceste paradoxe erau deja cunoscute logicienilor scolastici de la sfîrşitul Evului Mediu. Aşa cum s-a descoperit (de către Łukasiewicz) că sistemul calculului propoziţional din logica matematică contemporană era deja cunoscut şi expus într-un tratat întreg de către logicienii medievali, tratat intitulat *Tractatus consequentiarum* (sau mai pe scurt *Consequentiae*), tot aşa vom încerca să regăsim printre contribuţiile acestor logicieni soluţiile contemporane ale contradicţiilor logico-matematice. Sperăm că studiul nostru va provoca şi alte cercetări asupra altor teorii scolastice, cum sînt acelea ale particulelor *syncategoremata* şi *suppositio* etc., care pot aduce la lumină rezultate încă absente în logica contemporană.

I. LISTA PARADOXELOR

Vom prezenta mai întîi o listă cronologică a paradoxelor, urmărind pe aceea dată de Beth [1]:

1) Paradoxul mincinosului, descoperit în Antichitate de Eubulides din Megara, după cum ne raportează Diogenes Laertios.

2) Paradoxul lui Burali-Forti (1897) asupra celui mai mare număr ordinal, care, de altfel, fusese deja întîlnit de Cantor însuşi (1895).

3) Paradoxul lui Cantor (1895) asupra celui mai mare număr cardinal, publicat de Zermelo în 1932.

[1] W. E. Beth, *The Foundations of Mathematics*, ed. a II-a, p. 482 (Amsterdam, North Holland Publishing House, 1965).

4) Paradoxul lui Russell (1903) asupra clasei claselor care nu se conțin ele însele ca element.
5) Paradoxul lui Richard (1905).
6) Paradoxul lui Zermelo-König (1905).
7) Paradoxul denotației descoperit de Russell (1905).
8) Paradoxul lui Berry, publicat de Russell în 1906, care este numai o formă simplificată a paradoxului lui Richard.
9) Paradoxul lui Grelling publicat de Nelson și Grelling (1908).
10) Paradoxul bărbierului satului descoperit de Russell (1918).
11) Paradoxul lui Skolem-Löwenheim (1923).
12) Paradoxul analizei, construit de G. E. Moore (1942).

Există încă alte paradoxe, descoperite după 1950, înrudite cu precedentele, care au devenit acum clasice; ele diferă totuși de acelea din lista citată prin faptul că sînt construite cu scopul de a elucida anumite rezultate matematice și descoperirea lor nu a fost nici o surpriză și nici nu au avut repercusiuni serioase. Nu vom face decît să le menționăm aici, fără a le da o importanță specială.

13) O nouă versiune a paradoxului lui Russell propusă de R. L. Stanley (1953).
14) Paradoxul clasei tuturor claselor fundate, construit de Shen Yuting (1953).
15) Paradoxul lui Russell în logicile polivalente, construit de Moh Shaw-Kwei (1954).
16) Paradoxul lui Geash-Löb (1955).
17) Două paradoxe semantice construite de Shen Yuting (1955).

II. EXPUNEREA UNOR PARADOXE-CHEIE

Pentru a putea sesiza natura exactă a mecanismului logic al paradoxelor, vom expune unele din aceste contradicții. Aceasta ne va ajuta să clarificăm subiectul pe care-l discutăm. După cum se va vedea, în toate aceste paradoxe este vorba de noțiuni sau propoziții care trebuie să se aplice lor înseși — în terminologia scolastică, „să se reflecte asupra lor înseși".

1. Paradoxul lui Russell

Se constată că există mulțimi (clase) care se conțin singure ca element și mulțimi care nu se conțin ca element [2].

Cu toate că existența mulțimilor care se conțin singure a fost contestată de unii logicieni, problema care urmează nu depinde de faptul că astfel de mulțimi există sau nu, după cum a observat foarte bine Fraenkel [3], deoarece propoziția: „Orice mulțime își aparține ca element sau nu-și aparține, *ter-*

[2] Bertrand Russell, *The Principles of Mathematics* (Cambridge Univ. Press, 1903).
[3] A. Fraenkel și J. Bar-Hillel, *Le Problème des antinomies et son état actuel* („Revue de métaphysique et de morale", 26, 1939, p. 233).

tium non datur" este o tautologie, și de aceea adevărată totdeauna, independent de faptul că astfel de mulțimi există sau nu în realitate.

Toate mulțimile care se conțin formează o nouă mulțime, *G*. Toate mulțimile care nu se conțin formează o nouă mulțime, Γ. Această mulțime Γ ar trebui și ea să se conțină sau să nu se conțină ca element. Dar ea nu poate să se conțină ca element, fiindcă membrii ei sînt numai acele mulțimi care nu se conțin, și nici să nu se conțină ca element, fiindcă prin definiție ea conține toate mulțimile care nu se conțin.

În simboluri paradoxul apare și mai simplu. Definiția mulțimii Γ este „mulțimea tuturor mulțimilor care nu se conțin ca element", care se scrie astfel:

$$\alpha \in \Gamma = \sim \alpha \in \alpha \qquad \text{Df.}$$

„Mulțimea α aparține mulțimii Γ (a tuturor mulțimilor care nu se conțin ca element) înseamnă mulțimea α nu-și aparține ca element."

Acest lucru fiind adevărat oricare ar fi mulțimea α, avem echivalența (*definiendum* este echivalent cu *definiens*):

$$\alpha \in \Gamma \equiv \sim \alpha \in \alpha.$$

Această echivalență este adevărată pentru orice valori ale simbolurilor. Pentru $\alpha = \Gamma$, obținem:

$$\Gamma \in \Gamma \equiv \sim \Gamma \in \Gamma.$$

Propoziția „Mulțimea Γ se conține ca element" este echivalentă cu propoziția „Mulțimea Γ nu se conține ca element", ceea ce este o contradicție. Tot Russell a arătat (1905) că se poate obține un paradox similar utilizînd numai noțiunea de predicat. Dacă un predicat oarecare are proprietatea pe care o denotă, vom spune că el are proprietatea *predicabil*, dacă nu, vom spune că el este impredicabil. Orice predicat este prin urmare sau *predicabil* sau *impredicabil, tertium non datur*. Predicatul *impredicabil* trebuie să fie și el sau predicabil sau impredicabil. Dacă este însă predicabil, atunci el admite proprietatea pe care o desemnează, deci este impredicabil iar dacă este impredicabil, atunci are proprietatea pe care o denotă, așadar este predicabil.

Simbolic acest paradox se scrie foarte ușor, ca și în cazul precedent. Avem definiția: „Dacă predicatul ψ nu are proprietatea ψ, atunci ψ este impredicabil" (vom scrie pe scurt *Imp* pentru impredicabil). Avem dar definiția simbolică:

$$\text{Imp } (\psi) = \sim \psi(\psi) \qquad \text{Df.}$$

Această definiție conduce la echivalența dintre *definiens* și *definiendum*:

$$Imp\ (\psi) \equiv \sim \psi(\psi).$$

Echivalența de mai sus este valabilă pentru orice valoare a predicatului ψ. Pentru valoarea particulară $\psi = Imp$, obținem:

$$Imp\ (Imp) \equiv \sim Imp\ (Imp).$$

Astfel propoziția „*Impredicabil* este impredicabil" este echivalentă cu propoziția „*Impredicabil* nu este impredicabil", ceea ce este contradictoriu.

Importanța acestor paradoxe construite de Russell rezidă în particular în faptul că ele arată că natura acestor contradicții este pur logică și că ele nu apar ca o consecință a unor noțiuni matematice mai complexe sau nu destul de precise — cum ar fi noțiunea de mulțime —, ci mai curînd că ele aparțin cadrului logic însuși.

2. Paradoxul lui Grelling-Nelson

Iată paradoxul descoperit de Grelling și Nelson [4].

Dacă un cuvînt are proprietatea pe care o denotă, atunci el este *autologic*; dacă nu are această proprietate, atunci el este *heterologic*. Atunci cuvîntul „*heterologic*" trebuie să fie și el sau autologic sau heterologic. Dacă cuvîntul „*heterologic*" este autologic, atunci el are proprietatea pe care o desemnează, deci este heterologic; dacă „*heterologic*" este heterologic, atunci el are tocmai proprietatea pe care o denotează, așadar este autologic. Contradicția este manifestă. Este ușor să exprimăm acest paradox în simboluri. Să notăm cu „*C*" orice cuvînt și proprietatea pe care o desemnează prin *C*. Definiția predicatului *heterologic* (pe scurt *Het*) este atunci:

$$Het\,(„C") = \sim C(„C"). \qquad \text{Df.}$$

Această definiție duce la echivalența dintre *definiens* și *definiendum*:

$$Het\,(„C") \equiv \sim C(„C").$$

Această echivalență fiind adevărată oricare ar fi cuvîntul „*C*", să-i dăm valoarea particulară „*C*" = „*Het*". Obținem contradicția:

$$Het\,(„Het") \equiv \sim Het\,(„Het").$$

3. Paradoxul mincinosului

Există un foarte vechi paradox care are o analogie frapantă cu paradoxele descoperite de matematicienii contemporani în teoria mulțimilor sau cu acelea de natură pur logică. Acest paradox, care a fost reținut de logica contemporană ca autentic, este faimosul paradox megaric al mincinosului — ψευδόμενος. Inițial el era formulat după cum urmează, în forma unei simple întrebări, la care mincinosul trebuia să răspundă: „Minți cînd spui că minți?" Dar mincinosul nu are decît două răspunsuri posibile — ***tertium non datur***: (1) „Mint"; (2) „Nu mint". Dacă acela, care spune că minte, *minte*, atunci el spune adevărul (că minte) și deci *nu minte*; dacă acela, care spune că minte, *nu minte*, atunci este adevărat că minte, *deci minte*. Rezultatul este că afirmația „Mint" nu poate fi declarată nici adevărată și nici falsă, pentru că ea ia imediat valoarea contrară.

O altă formă a acestui paradox este aceea cunoscută sub numele de Epimenide: „Epimenide cretanul spunea că toți cretanii sînt mincinoși".

[4] K. Grelling și L. Nelson, *Bemerkungen zu den Paradoxien von Russell und Burali-Forti* (Abhandlungen der Friesschen Schule, Neue Folge, nr. 2, 1908).

Ajungem la aceeași contradicție cînd încercăm să aflăm dacă ceea ce afirmă Epimenide este adevărat sau fals.

Importanța acordată acestei probleme, de la prima ei apariție, poate fi apreciată din faptul că un număr mare de autori antici s-au ocupat de ea, și însuși Aristotel o discută în mai multe locuri din opera sa; Seneca afirmă (*Epistola* 45) că „s-au scris atît de multe cărți asupra acestui sofism"; celebrul dialectician stoic Chrysippos îi dă un loc special în tratatele lui de logică, dintre care cîteva erau dedicate în întregime studiului „mincinosului"; în sfîrșit, istoria ne raportează ciudata legendă a lui Philetas, care, se presupune, a murit din cauza eforturilor lui zadarnice de a rezolva acest sofism.

Există mai multe variante ale acestu paradox, cea mai simplă fiind: „Propoziția pe care o pronunț acum este falsă". Alte variante, ceva mai dezvoltate, sînt numite, după cum ne spune Aulus Gellius în *Noctes atticae*, ἀντιστρέφοντα sau *reciproca*, și apar mai ales printre sofismele apreciate de către stoici ca o gimnastică dialectică. Sofismul crocodilului sau argumentația din cazul procesului dintre Protagoras și discipolul lui Eulathus sînt exemple bine cunoscute de astfel de „argumente reciproce". Vom cita una din aceste variante după Ferdinand Gonseth.[5]

Pe o insulă oarecare trăia o rasă de giganți foarte deștepți, dar cruzi. Din cauză că erau cruzi, ucideau pe orice străin care venea în țara lor; din cauză că erau deștepți, au imaginat o cale de a-l face să pronunțe propria lui sentință de condamnare: îi puneau o întrebare, și dacă răspunsul era adevărat, îl sacrificau Idolului Adevărului, dacă răspunsul era fals, îl sacrificau Idolului Falsului. Într-o zi s-a întîmplat că ei au pus unui străin mai deștept decît ei imprudenta întrebare: „Cum vei fi sacrificat?" Străinul răspunse: „Mă veți sacrifica Idolului Falsului". Consiliul giganților a intrat într-o lungă discuție. Dacă acest om a spus un adevăr, atunci, trebuie să fie sacrificat Idolului Adevărului, dar în acest caz afirmația lui este falsă; dacă afirmația lui este falsă, trebuie sacrificat Idolului Falsului, dar atunci el a spus adevărul. Propoziția străinului nu poate fi declarată nici adevărată, nici falsă, fiindcă în fiecare caz ea conduce la o contradicție.

III. TEORIA TIPURILOR

Primul care a observat că problema antinomiilor cantoriene trebuie pusă pe un plan pur logic, că ea este exclusiv de natură logico-formală, este Bertrand Russell. În acest sens el scrie[6]: „Voi observa că aceste paradoxe nu sînt în legătură exclusivă cu ideile de număr și cantitate. Prin urmare, nici o soluție care încearcă să le dea o mai bună explicație ca un rezultat al unei întrebuințări nelegitime a acestor idei nu poate fi adecvată. Soluția trebuie găsită în ordinea ideilor logice fundamentale." Soluția lui Russell, care, fără îndoială, constituie cel mai important efort pentru a rezolva aceste contra-

[5] F. Gonseth, *Les Fondements des mathématiques*, ed. Blanchard, p. 214 (Paris, 1926).

[6] A. N. Whitehead și B. Russell, *Principia Mathematica*, I, p. 63 (Cambridge Univ Press, 1910).

dicții, este numită de către autor „Teoria tipurilor logice". El pleacă de la ideea că toate afirmațiile exprimate în termeni de clase și relații pot fi reduse la afirmații exprimate în termeni de funcții propoziționale, o „funcție propozițională" conținînd o variabilă x, și exprimînd o propoziție îndată ce se dă o valoare lui x. În felul acesta, paradoxele care se referă la propoziții, clase, numere cardinale și ordinale etc. se reduc la paradoxe care se referă la propoziții și funcții propoziționale.

Teoria tipurilor rezultă din așa-numitul „principiu al cercului vicios", după cum scrie însuși Russell. Acest cerc vicios s-ar naște din faptul că se presupune că o colecție de obiecte poate conține membri care pot fi definiți numai cu ajutorul colecției luate în totalitatea ei. În general, spune Russell, să luăm un grup de obiecte, astfel că fiind capabil de totalizare, el conține membri care presupun această totalitate. Atunci grupul nu poate fi totalizat. Propozițiile care exprimă astfel de situații, anume acelea care definesc membrii unei totalități cu ajutorul colecției însăși, sînt, după el, lipsite de sens *(meaningless)*. Paradoxele logico-matematice s-ar naște din astfel de propoziții fără sens (o propoziție are sens numai dacă ea poate fi fie adevărată, fie falsă). De exemplu, paradoxul „clasei claselor care nu se conțin ca element" este rezolvat de Russell în modul următor. O clasă (mulțime) este un obiect care derivă dintr-o funcție propozițională $\varphi(x)$ și presupune această funcție. Urmează că o clasă nu poate fi argumentul funcției care o definește; aceasta înseamnă că dacă însemnăm prin

$$\hat{x}\,(\varphi\, x)$$

clasa definită de funcția proporțională $\varphi(x)$ (cu un singur argument), simbolul

$$\varphi[\hat{x}(\varphi\, x)]$$

trebuie considerat ca lipsit de sens, conform principiului cercului vicios. În felul acesta, propozițiile care afirmă că o clasă este sau nu membru al ei înseși nu au nici un sens. Afirmațiile „clasa α nu este un membru al clasei α" ($\sim \alpha \in \alpha$), sau „clasa α este un membru al clasei α" ($\alpha \in \alpha$) sînt lipsite de sens. Același principiu se aplică și în comprehensiune, și expresiile $\varphi(\varphi)$ sau $\sim \varphi(\varphi)$ sînt la fel fără sens, și nu pot fi nici false, nici adevărate; ele trebuie excluse din simbolismul logic. De fapt, propoziția „Socrate este om", de exemplu, poate fi gîndită fără a fi considerată ca o valoare particulară a funcției propoziționale „x este om". Cu alte cuvinte, valorile unei funcții propoziționale sînt presupuse de funcție, dar nu este adevărat că orice valoare a funcției presupune funcția însăși. Pentru acest motiv se ajunge la aceste cercuri vicioase, prin inversarea rolului acestei dependențe.

Pe scurt, Russell admite că există valori ale argumentului pentru care funcția propozițională $\varphi(x)$ nu are nici un sens și nu exprimă nimic, astfel că acestea trebuie excluse din domeniul de valori ale argumentului. Dacă nu luăm aceste precauții, atunci ajungem la expresii ca acelea citate

$$\alpha\in\alpha,\quad \sim\alpha\in\alpha,\quad \varphi(\varphi),\quad \sim\varphi(\varphi)$$

care sînt fără sens și nu exprimă nimic, deoarece nu pot fi nici adevărate și nici false.

Începînd de la această analiză, teoria tipurilor s-a dezvoltat într-un mod mult mai precis. Conceptele (și deci proprietățile) s-au împărțit în „tipuri".

Distingem astfel *indivizii*, adică ceea ce nu este o proprietate (concepte de tipul zero); apoi *proprietăţile indivizilor* (tipul 1); după aceea *proprietăţile proprietăţilor indivizilor* (tipul 2) etc. Să dăm cîteva exemple, o dată cu Carnap[7]: *corpurile* sînt indivizi (tipul zero); *triunghiular* sau *roşu* sînt atunci proprietăţi ale indivizilor (tipul 1); *proprietăţile spaţiale, culoarea* sînt proprietăţi ale proprietăţilor indivizilor (tipul 2) etc. Teoria tipurilor stabileşte astfel următoarea regulă: un concept de tipul n poate accepta sau nu ca predicat numai un concept de tipul $n + 1$. Iată cîteva exemple. Dacă a şi b sînt corpuri (tipul 0), propoziţiile „a este triunghiular" sau „b este roşu" sînt adevărate sau false, deci au sens; propoziţiile „triunghiular este o proprietate spaţială" şi „roşu este o culoare" sînt adevărate; dimpotrivă, expresiile „a este o proprietate spaţială", „triunghiular este roşu", „culoarea este o proprietate spaţială" nu sînt nici adevărate, nici false, ci fără sens. Dar dacă se ia în considerare regula indicată de teoria tipurilor, aceste expresii nu pot fi formate şi vom *evita* astfel expresiile care conduc la paradoxe. În particular, o proprietate nu se poate aplica ei înseşi, şi nu se pot deci forma expresiile $\varphi(\varphi)$ sau $\sim \varphi(\varphi)$, pentru că argumentul şi predicatul lui trebuie să fie de tipuri diferite, şi aici şi argumentul şi predicatul fiind acelaşi are acelaşi tip n. Expresii ca „*impredicabil* este impredicabil" sau „*impredicabil* nu este impredicabil" nu respectă teoria tipurilor şi de aceea ele nu exprimă nimic şi nu sînt admisibile.

Să vedem acum care este baza logică a acestei teorii. Russell ne spune că această teorie s-a născut din necesitatea de *a evita (avoiding)* cercurile vicioase. Dar ea are un caracter mai general, „o oarecare consonanţă cu simţul comun, care o face esenţial credibilă" *(inherently credible)*. Mai mult, ideea directoare a lui Russell, după eşecul lui de a rezolva aceste contradicţii prin mijloacele logicii clasice, consta în încercarea de a găsi o regulă, sau reguli, care să ne permită să *evităm (avoid)* formarea unor expresii susceptibile să degenereze în contradicţii. Ceea ce a ghidat cercetările lui Russell nu a fost ideea de a rezolva aceste probleme paradoxale, ci mai curînd să găsească regulile în virtutea cărora aceste probleme să nu se pună. El a exprimat acest punct de vedere în mod clar în faimoasa lui polemică cu Henri Poincaré[8], care susţinea că este suficient să descoperi că toate aceste probleme sînt cercuri vicioase, pentru a constata că ele sînt erori. La aceasta Russell a replicat: „Poincaré crede că toate aceste paradoxe derivă dintr-un fel de cerc vicios şi aici sînt de acord cu el. Dar el nu vede dificultatea care există în a evita un cerc vicios de felul acesta."[9]

Ghidat de acest scop de a găsi o regulă practică, care să-i permită să „evite" cercurile vicioase implicate în astfel de probleme, Russell a pierdut din vedere faptul că problema logică reală este de a arăta în mod exact unde s-a comis eroarea din care decurge cercul vicios. Problema pur logică nu este aceea de a ne da reguli convenţionale pentru a *evita* paradoxele, ci să arătăm unde se află greşeala de logică, în ce consistă ea, astfel ca „evitarea" ei să fie un rezultat, nu un scop.[10]

[7] Rudolf Carnap, *Die alte und die neue Logik* („Erkenntnis", 1, 1930, p. 12–26).

[8] H. Poincaré, *Science et méthode*, p. 206–207 (Paris, Flammarion, 1908).

[9] B. Russell, *Les Paradoxes de la logique* („Revue de métaphysique et de morale", 13, 1906, p. 627).

[10] Acesta este modul în care am pus problema şi am încercat să o rezolvăm în studiul nostru *Soluţia paradoxelor logico-mathematice* (Editura Ştiinţifică, 1966).

Calea aleasă de Russell este, de aceea, deschisă discuțiilor, și nu este surprinzător că teoria lui nu este deloc satisfăcătoare din punctul de vedere logic. Ceva mai mult, pentru a evita construcția propozițiilor paradoxale, Russell impune, prin teoria sa, o mulțime de sacrificii, eliminînd și propoziții cu un sens perfect determinat. În felul acesta, Russell a mers mai departe decît Antisthene din Antichitate . . .

Trebuie să notăm de asemenea, de acord cu Hao Wang și McNaughton, că teoria tipurilor nu împiedică complet formarea claselor așa-numite „nonpredicative", adică a claselor care sînt definite cu ajutorul totalității din care fac parte ca membri. Autorii citați conchid analiza teoriei tipurilor astfel [11]: „Rezultă că o parte importantă a matematicilor superioare poate fi derivată din teoria tipurilor numai dacă se admit clasele nonpredicative. De aceea, cu toate că putem fi convinși că paradoxul lui Russell ca și celelalte paradoxe binecunoscute nu pot fi derivate din aceasta, admiterea unor clase nonpredicative ne împiedică de a fi pe deplin convinși că teoria tipurilor este necontradictorie."

Așadar, „soluția" paradoxelor logico-matematice prin teoria tipurilor — soluție socotită unanim drept cea mai importantă — are totuși unele caractere îndoielnice. Acest caracter îndoielnic a fost recunoscut deschis de însuși Russell, care și-a exprimat propria lui neîncredere în felul următor [12]: „Teoria tipurilor nu aparține în mod absolut unei părți finite a subiectului nostru. Necesitatea unei doctrine a tipurilor este neîndoielnică, dar această doctrină are încă nevoie de o formă precisă."

IV. ANTINOMII LOGICE ȘI ANTINOMII SEMANTICE

Frege și Russell au căutat să fundeze aritmetica (și prin ea întreaga matematică, întrucît ea se reduce la aritmetică) cu ajutorul noțiunii de mulțime (sau clasă) și logica clasică. Dificultățile întîmpinate în realizarea acestui program l-au condus pe Russell să inventeze teoria tipurilor pentru a elimina paradoxele. Dar chiar această teorie a ridicat alte probleme dificile, care au putut fi depășite numai prin acceptarea unei noi axiome. La început, Russell a fost obligat să introducă, pe lîngă teoria simplă a tipurilor (de care am vorbit mai sus), *teoria ramificată a tipurilor*, după care funcțiile propoziționale de același tip au fost împărțite în „ordine". Noi dificultăți au fost eliminate de Russell cu ajutorul unei axiome suplimentare, axioma de reductibilitate, în virtutea căreia o funcție propozițională putea fi redusă, sub anumite condiții, la primul ordin. Acceptarea acestei axiome, și de asemenea a altora devenite necesare — axioma infinitului și axioma alegerii — au împovărat programul lui Frege și Russell cu prea multe dificultăți destul de incomode. Aceste dificultăți au condus pe matematicieni să simplifice, pe cît era posibil, teoria tipurilor. Un prim pas în această direcție a fost făcut de

[11] Hao Wang și R. McNaughton, *Les Systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles* (Paris-Louvain, Gauthiers-Villars, 1953).

[12] Bertrand Russell, *Introduction à la philosophie mathématique*, trad. franc., p. 159 Paris, Payot, 1923).

Chwistek, în 1922, şi de Ramsey, în 1926, amîndoi renunţînd la teoria ramificată a tipurilor.

Ramsey a împărţit antinomiile în două grupe distincte [13]:

Grupa A

1) Clasa tuturor claselor care nu se conţin ca element.
2) Relaţia a două relaţii *R* şi *S*, cînd *R* nu are relaţia *R* cu *S*.
3) Paradoxul lui Burali-Forti.

Grupa B

4) „Mint".
5) Ultimul număr definit prin mai puţin de 19 silabe.
6) Paradoxul lui Richard.
7) Antinomia formată cu cuvîntul *heterologic*.

Ramsey observă că paradoxele din *Grupa A* sînt formate cu noţiuni matematice sau logice, cum sînt acelea de clasă şi număr, astfel că acestea vor aparţine oricărui sistem matematic sau logic. În *Grupa B* se găsesc referinţe la gîndire, limbaj sau simbolism, care nu sînt termeni formali, ci empirici. „Prin urmare — scrie Ramsey — ele nu se datoresc unor vicii matematice sau logice, ci unor idei eronate asupra gîndirii şi limbajului." Ramsey pleacă de la observaţia lui Peano, făcută de acesta referitor la antinomia lui Richard, anume că: „Exemplul lui Richard nu aparţine matematicilor, ci limbajului". După cum se ştie, Peano a numit astfel de antinomii — de tipul Richard — *„antinomii lingvistice"*. Ramsey, la rîndul lui, numeşte antinomiile din *Grupa B*, *„antinomii epistemologice"*. Acest fel de antinomii vor fi numite mai tîrziu, prin terminologia consacrată, *„antinomii semantice"*, pe cînd antinomiile de tipul celor din *grupa A* vor fi numite *„antinomii logice"*.

Progresul realizat de această separare a antinomiilor este următorul. Am spus deja că teoria tipurilor, introdusă în logică în scopul de a evita paradoxele, a dat loc la unele consecinţe nefericite (de exemplu, în teoria numerelor reale), aşa că Russell a fost obligat să apeleze la o axiomă suplimentară, aşa-numita *axiomă de reductibilitate (axiom of reducibility)*. Această axiomă afirmă, în esenţă, că „dacă o proprietate a unui obiect aparţine unei colecţii de obiecte, atunci există un predicat determinat care se aplică aceleiaşi colecţii". Distincţia făcută de Ramsey arată că *antinomiile semantice* nu pot apărea în sistemele matematice sau logice; deoarece primul tip de antinomii poate fi eliminat prin teoria simplă a tipurilor, rezultă că axioma de reductibilitate devine inutilă. Această reducere a dificultăţii a părut că marchează un progres. Dar problema „antinomiilor semantice" (cum au fost numite mai tîrziu antinomiile din *Grupa B*) se impune cu aceeaşi importanţă din punct de vedere *logic* şi ea cere, de asemenea, o soluţie.

Pentru a rezolva paradoxul *semantic* al mincinosului, („Eu mint"), Russell însuşi a propus o „tipizare" a noţiunii de „adevărat" şi „fals". După cum s-au separat proprietăţile într-o ierarhie de „tipuri", tot astfel există diferite tipuri de adevăr şi fals. Să considerăm ca fiind dată propoziţia *p*

[13] F. P. Ramsey, *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays* (Kegan Paul, Londra, 1931).

și funcția „$\hat{p}$ este fals", spune Russell ($\hat{p}$ înseamnă funcția considerată în ea însăși). Să luăm propoziția

„$(p) \cdot \hat{p}$ este falsă"

(pentru toate valorile lui p, $\hat{p}$ este falsă). „Am fi înclinați, scrie Russell, să spunem că propoziția p este falsă pentru că ea nu poate fi niciodată adevărată." [14] Astfel ajungem la propoziția

„$\{(p) \cdot \hat{p}$ este falsă$\}$ este falsă".

Aici „$(p) \cdot \hat{p}$ este falsă" este luată ca argument pentru funcția „$\hat{p}$ este falsă" Dar după teoria tipurilor, argumentul unei funcții nu poate fi înlocuit cu însăși funcția. Va trebui să distingem, scrie Russell, adevărul propoziției „p", care este de tipul 1, de tipul adevărului propoziției „$(p) \cdot \hat{p}$ este falsă", care are o valoare de adevăr de tipul doi. Confundînd cele două tipuri de adevăr, comitem o eroare care conduce la paradoxul mincinosului. Dar dacă respectăm ierarhia diverselor sensuri ale termenilor „adevărat" și „fals", în conformitate cu felul propozițiilor cărora ei sînt aplicați, atunci este posibil să se evite contradicțiile ce rezultă din confuzia acestor diverse înțelesuri.

Aceste concluzii au fost generalizate de către Rudolf Carnap și în special de Alfred Tarski. [15] Ultimul a demonstrat cîteva teoreme relative la limitele permise în utilizarea noțiunilor de „adevărat" și „fals". Trebuie mai întîi să distingem între „un limbaj logic" (limbajul-obiect) și „metalimbaj", care vorbește despre primul, și apoi „un meta-meta-limbaj", care vorbește despre al doilea limbaj (și-i stabilește proprietățile) ș.a.m.d. Să presupunem atunci că avem un asemenea limbaj logic care utilizează conceptele de „adevărat" și „fals". Analiza lui Tarski arată că aceste concepte nu pot fi definite în mod riguros în același limbaj, ci numai într-un limbaj metalogic. Cu alte cuvinte, conceptele „adevărat" și „fals" aparțin altui sistem logic, care vorbește despre logica întrebuințată (sau despre limbajul logic). Să citām concluziile lui Tarski:

A. Pentru orice limbaj formalizat se poate construi în metalimbaj o definiție formală corectă a propoziției adevărate, utilizînd numai expresii din limbajul însuși și termenii morfologiei, dar totdeauna cu condiția ca metalimbajul să fie de un ordin mai înalt decît al limbajului care este obiectul direct al cercetării.

B. Cînd ordinul metalimbajului este egal cu ordinul limbajului însuși, o astfel de definiție nu poate fi construită.

Să numim S o limbă logică (sau un formalism logic); S_1 va fi formalismul metalogic (care vorbește despre propozițiile din S); S_2 va fi atunci formalismul logic care vorbește despre S_1 etc. Demonstrația lui Tarski arată că noțiunile de „adevărat" și „fals" nu pot fi definite în S, ci în S_1 etc. Rezultatul este că nu se poate vorbi despre valorile de adevăr luate de o propoziție într-un sistem formal S în sistemul S însuși, dar se poate vorbi despre ele în mod riguros într-un metasistem.

Dacă nu luăm în considerare aceste concluzii, putem să ajungem la contradicții de felul aceleia a mincinosului. Mincinosul se decide să pronunțe

[14] Whitehead și Russell, *Principia Mathematica*, I, p. 65.
[15] A. Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen* (Leopoli, 1935), p. 399.

numai propoziții false. Dar el nu poate spune nimic despre valorile de adevăr ale propoziției „Eu mint" în sistemul în care el a construit această propoziție. Cînd el declară că propoziția „Eu mint" este „adevărată" sau „falsă", el afirmă ceva despre adevărul și falsul acestei propoziții în propriul lui sistem ceea ce este imposibil, și din acest motiv se ajunge la contradicții.

Pentru a putea evita antinomiile semantice, în general, Russell însuși a sugerat ideea de a se extinde teoria tipurilor la o „teorie a nivelelor de limbaj" (în *Introducerea* la *Tractatus logico-philosophicus* al lui Ludwig Wittgenstein). Această teorie a limbajelor și metalimbajelor a fost elaborată de Ramsey, Carnap și Tarski. După cum există o ierarhie a tipurilor pentru concepte, la fel trebuie admisă o ierarhie a limbajelor. Regula devine aici următoarea: nu se poate vorbi despre un limbaj (cuvinte, semne, expresii etc.) în același limbaj, ci numai într-un *metalimbaj*. În modul acesta și antinomiile lingvistice pot fi evitate.

Să considerăm, de exemplu, antinomia lui Grelling-Nelson. Ni se spune, în această antinomie, că un cuvînt al unei limbi date este *autologic* dacă are proprietatea pe care o desemnează; în caz contrar, el este *heterologic*. Cuvîntul „scurt" este *autologic* deoarece este într-adevăr scurt. Dar distincția stabilită de regula metalimbajelor ne previne că aici cuvîntul „scurt" este utilizat de două ori; al doilea cuvînt „scurt" aparține unui limbaj superior primului care utilizează cuvîntul „scurt", și deci proprietatea de a fi „scurt" aparținînd cuvîntului „scurt" din primul limbaj nu este proprietatea reprezentată de al doilea cuvînt „scurt", ci o proprietate analogă din metalimbaj (care vorbește despre primul).

Diferitele tipuri sau nivele de limbaj nu trebuie să fie confundate, pentru că o asemenea confuzie produce paradoxele semantice, la fel după cum confuzia tipurilor de concepte dă loc la antinomiile logice. Este astfel clar că teoria nivelelor de limbaj este tot atît de convențională ca și teoria tipurilor logice. Amîndouă teoriile pot fi privite ca expediente, nu ca soluții logice.

V. SOLUȚIILE LOGICIENILOR SCOLASTICI

1. Insolubilia

Logicienii scolastici au acordat o mare atenție sofismelor în general care ocupau un spațiu vast în tratatele lor. În afară de studiul sofismelor, după Aristotel, cărora le era închinat un tratat special *Tractatus de sophisticis elenchis*, și de anumite sofisme speciale studiate în tratatele intitulate *Sophismata*, mai găsim în Evul Mediu alte două tratate dedicate unor probleme noi, care nu se găsesc în *Organon*-ul aristotelic, sau sînt numai pomenite: (1) problema „insolubilelor" *(insolubilia)*; (2) problema particulelor *syncategoremata* (consignificative).

Ne vom ocupa aici numai de problema acestor *insolubilia*. Această problemă apare puțin mai tîrziu în cursul Evului Mediu. Urme ale acestor paradoxe „insolubile" — care gravitează toate în jurul paradoxului mincinosului — se găsesc în celebrul tratat *Summulae logicales* al lui Petrus His-

panicus (1226–1277), ba chiar și înaintea lui. Antinomia mincinosului a luat diverse forme uneori mai complicate, toate acestea fiind expuse în tratatele timpului. Albertus de Saxonia (m. 1390) enumeră 14 variante ale „mincinosului" în tratatul său *Perutilis logica* (tipărit prima dată la Veneția, 1522). Toate aceste variante pot fi reduse la următoarele trei:

(1) *Ego dico falsum:* „Eu spun fals" („Eu mint").

(2) *Propositio scripta in illo folio est falsa:* „Propoziția scrisă pe această foaie de hîrtie este falsă".

(3) Forma *reciproca:* Socrate pronunță o singură propoziție: „Platon spune falsul" și Platon pronunță o singură propoziție: „Socrate spune adevărul". Care din aceste propoziții este adevărată și care falsă?

Oricare din aceste trei forme conduce la contradicții, oricare ar fi valoarea de adevăr pe care le-am acorda-o.

Amploarea dezvoltării acestei probleme este extraordinară, dacă ar fi să o apreciem numai după spațiul pe care-l ocupă în tratatele timpului.

Care este soluția dată de logicienii scolastici acestor *insolubilia?* Sînt mai multe soluții. O listă a tuturor soluțiilor date a fost alcătuită de Paulus Nicolettus Venetus (m. 1428), în tratatul său *Logica magna* (tipărită la Veneția, 1499). Am făcut o analiză a tuturor acestor variante ale „mincinosului", ca și a celor 15 soluții citate de Venetus în altă parte [16].

Vom alege dintre aceste 15 soluții scolastice numai trei, care ne apar a fi cele mai interesante, deoarece celelalte se bazează mai mult sau mai puțin pe acestea.

2. Soluția lui Buridan

Jean Buridan (m. 1358) tratează problema insolubilelor în tratatul său *Summula.* El consideră paradoxul sub forma lui reciprocă: Socrates afirmă o singură propoziție: *Plato dicit falsum* și Platon afirmă de asemenea o singură propoziție: *Socrates dicit verum.* După cum se știe, nici una din aceste propoziții nu poate fi declarată nici adevărată, nici falsă.

Buridan analizează mai de aproape cuvîntul *simul* (în același timp, simultan) și descoperă că numai printr-o întrebuințare imprudentă a acestui cuvînt se poate ajunge la o contradicție. Propozițiile contradictorii: „Socrate fuge" și : „Socrate nu fuge" nu pot să fie simultan *(simul)* adevărate, cu toate că fiecare poate fi adevărată într-un anumit interval de timp.

Prin urmare, timpul trebuie divizat în intervale și o propoziție poate fi declarată adevărată sau falsă numai după ce s-a specificat timpul cînd ea a fost afirmată. Astfel, propozițiile: „Socrate este în viață" și „Socrate este mort" încetează să fie contradictorii dacă nu confundăm intervalele lor de timp, deoarece una din ele aparține unui interval determinat al trecutului și cealaltă unui interval bine determinat după primul.

Această soluție a fost propusă în 1956 de François Moch [17]. Autorul nu menționează soluția lui Buridan, dar stabilește într-un chip similar un „timp

[16] În *Istoria logicii* (Editura Didactică și Pedagogică; ed. a II-a, 1975).
[17] François Moch, *La Logique des attitudes* („Dialectica", 10, nr. 3, Zürich, 1956).

logic" pentru oricare teorie, compus din toate momentele ataşate fiecărei propoziţii din această teorie. „Dacă t' şi t'' sînt două momente distincte, scrie Moch, atunci există cel puţin o propoziţie cu privire la care atitudinea nu este aceeaşi."

Să notăm, de asemenea, că soluţia lui Buridan este în legătură strînsă cu o teorie logică medievală numită „teoria obligaţiilor" *(Obligatoria)*, despre care nu putem vorbi în acest studiu. Teoria obligaţiilor a fost preluată în timpul nostru sub numele de *logica deontică*. Această logică s-a dezvoltat începînd cu lucrarea lui G. H. von Wright, articolul său *Deontic Logic (Mind*, 60, 1951). După aceasta au apărut numeroase studii în acest domeniu, dintre care cităm pe acelea ale lui O. Becker (1952), R. Blanché (1953), G. Kalinowski (1953), E. Garcia Máynes (1953), H. Neri Castañeda (1957) etc. Evoluţia *logicii deontice* poate fi urmărită în lucrarea lui G. Kalinowski, *La logique déontique (Archives de philosophie*, 34, p. 3–36, 1971).

3. Soluţia lui Albertus de Saxonia

Albertus de Saxonia consideră în tratatul său deja menţionat *Perutilis logica*, paradoxul implicat de insolubila *Ego dico falsum*, adică antinomia mincinosului. După ce analizează contradicţia care rezultă din această propoziţie, el apelează la o teorie numită pe atunci „teoria *impositio*" (impunerea unor nume, a unor calificative), teorie strîns legată de o alta, aceea numită *suppositio*. (Jacques Maritain traduce *suppositio* în franceză prin *suppléance:* substituţie, substituţia unui cuvînt sau expresie în locul altuia — o teorie care era extrem de dezvoltată în Evul Mediu şi cuprindea numeroase reguli.) [18] Albertus conchide analiza lui cu această regulă evidentă: „Nu este permis să se facă o predicaţie al cărei înţeles este constituit din judecata de predicaţie." *Impositio* poate fi făcută numai ţinînd seama de unele reguli, pe care scolasticii le enumerau într-un mod detaliat, şi printre acestea una foarte importantă era: *„Partea nu poate niciodată să semnifice întregul a cărui parte este"*. Sau cu alte cuvinte: *„Impositio* unui nume nu este niciodată permisă acolo unde semnificaţia a ceea ce este *impus* (dat ca nume) depinde de adevărul sau falsitatea propoziţiei în care este *impus"*.

Această idee s-a ivit şi în timpul nostru prin lucrările lui Russell, Carnap, Tarski ş.a. (cu totul independent de logicienii scolastici); după aceşti logicieni moderni, cum am văzut, un membru nu poate fi definit prin colecţia al cărei membru este (principiul cercului vicios). Scolasticii ar fi spus: nu putem *supponere pars* pentru *totum*, idee bine cunoscută de ei.

Albertus de Saxonia crede că poate rezolva sofismul cu ajutorul acestei reguli. Iată cum argumentează el. Să presupunem că *A* semnifică acest tot — *hoc totum: A significat falsum*, şi se cere să se determine dacă *A* înseamnă adevărat sau fals. Dacă *A* înseamnă adevărul, atunci, *A significat falsum* este falsă; dar s-a stabilit că *A* înseamnă acest tot *A significat falsum*; deci *A* înseamnă falsul; dacă *A* înseamnă falsul, atunci propoziţia *A significat falsum* este adevărată, şi *A* înseamnă aceasta, deci *A* înseamnă adevărul.

[18] J. Maritain, *Éléments de logique*, II. *Petite logique* (ed. a V-a, Paris, 1923), p. 75.

Acest sofism nu este posibil dacă nu se comite eroarea de a însemna întregul prin o parte a lui și Albertus afirmă că multe sofisme pot fi rezolvate prin această regulă.

4. Soluția lui Petrus de Allyaco

Petrus de Allyaco, în tratatul său despre *Insolubilia*, acceptă diviziunea ockhamistă a propozițiilor în trei categorii, pe care le reamintim: 1. *propositio mentalis*; 2. *propositio vocalis*; 3. *propositio scripta*.

Propoziția mentală propriu-zisă este o expresie adevărată sau falsă în mod natural *(naturaliter)*. Dar această propoziție nu este adevărată sau falsă prin faptul că înseamnă adevărul sau falsul din afară. Altfel spus, adevărul sau falsitatea unei propoziții mentale se găsește în „esența mentală a judecății", adică în sesizarea mentală a unei stări obiective de lucruri.

Propoziția mentală poate fi adevărată sau falsă, după cum reprezintă o stare de lucruri reală sau nu, dar nu ea afirmă ceva despre sine însăși, nu se poate declara singură adevărată sau falsă.

Valorile de adevăr ale unei propoziții mentale nu pot fi exprimate chiar în sistemul propozițiilor mentale, ci într-un sistem care vorbește despre propozițiile mentale, cum este sistemul propozițiilor orale sau scrise. În această idee se găsește concepția lui Russell a „nivelelor" de limbaj sau concepția metalogică: adevărul sau falsul propozițiilor formulate într-un sistem (la un anumit nivel logic) nu pot fi exprimate în același sistem, ci într-un metasistem (sau metalimbaj), idee dezvoltată de R. Carnap, A. Tarski ș.a., după cum am arătat mai înainte.

Notă

În articolul nostru *The Solution of the Logico-Mathematical Paradoxes* [19], am construit o serie de antinomii cu o soluție bazată numai pe regulile logicii clasice. Am arătat că dacă nu sînt luate în considerare unele reguli clasice (ca de exemplu acelea ale definiției), simbolismul logic, prin automatismul lui, poate să conducă la expresii care nu au nici un conținut. Este posibil să obținem în mod corect unele formule simbolice ca rezultat al calculului logic, dar prin ele nu gîndim nimic, după cum nu gîndim nimic prin definiții *idem per idem* sau prin definiții contradictorii. Avem totuși mijloace de a evita astfel de expresii simbolice, prin care nimic nu este gîndit, și deci nimic nu este exprimat, respectînd unele reguli clasice cunoscute, punîndu-le în evidență ca fiind implicate de orice definiție.

Un exemplu este soluția lui Aristotel, în cazul mincinosului care nu spune nimic cînd afirmă „Eu mint" *(Ego dico falsum)*. În *Metafizica* (IV, 4, 1008 a), el scrie textual, analizînd poziția luată de mincinos: „În același timp este evident că cu un astfel de om [mincinosul] nu poți discuta nimic. *Pentru că el nu spune nimic.*" Dar găsim chiar această soluție și printre cele 15 soluții

[19] Publicat în *International Philosophical Quarterly*, nr. 1, 1969. V. și în acest volum, *supra*.

medievale citate de Paulus Venetus, în lucrarea deja menționată, *Logica magna*. Astfel, a cincea soluție este următoarea: *Quinta ponit, quod Socrates dicens, se ipsum dicere falsum, nihil dicit* — „A cincea afirmă că Socrate, spunînd că el însuși spune falsul, *nu spune nimic*".

CONCLUZII

Dacă comparăm acum soluțiile paradoxului mincinosului date de logicienii scolastici cu soluțiile propuse de logicienii contemporani, ni se impune o observație: nimic din ceea ce este esențial în soluțiile contemporane nu depășește soluțiile logicienilor medievali (decît prin tehnică și dezvoltarea lor). Dar dacă examinăm mai de aproape soluțiile scolastice, putem observa că ele scrutează mai adînc rădăcinile logice ale problemei decît o fac soluțiile contemporane. Există logicieni ai timpului nostru care caută soluții „ comode" (sau procedee convenționale), de fapt arbitrare, dar capabile să elimine contradicțiile dintr-un sistem formal. Scolasticii au adoptat însă un punct de vedere pur *logic*, și nu în mod simplu o poziție *convențională*. *O soluție convențională, chiar dacă este eficace — trebuie să accentuăm — nu este o soluție logică*. Prin soluțiile lor scolasticii au căutat să arunce lumină asupra contradicției logice și, făcînd așa, au încercat s-o dizolve. Astfel înțelegem foarte bine cînd ni se spune: *Nulla res creata potest esse propria et distincta cognitio formalis sui ipsius*. Aceasta este o soluție logică și nu o convenție prohibitivă.

International Philosophical Quarterly, 2, New York, 1974.

Deducția necesară și deducția contingentă

I. INTRODUCERE

Logica matematică s-a născut și s-a dezvoltat din nevoia de a explica și a fundamenta matematica. Ea este o disciplină care-și propune, în primul rînd, să explice procesele logice din matematici. Acest lucru apare bine definit încă din lucrările lui Gottlob Frege, și s-a precizat pe parcurs. În acest sens, P. S. Novikov scrie [1]: „Una din problemele de bază ale logicii matematice rămîne analiza fundamentelor matematicii. În prezent, ea a depășit cadrul acestei probleme și exercită o influență importantă asupra dezvoltării matematicii însăși."

A. Mostowski [2] a precizat că problemele generale cu privire la fundamentele matematicilor se reduc la următoarele două:

1. Care este natura noțiunilor considerate în matematică, în ce măsură ele au fost construite de oameni, în ce măsură ele au fost impuse din exterior, și de unde le cunoaștem proprietățile?

2. Care este *natura demonstrațiilor matematice* și care sînt criteriile care ne permit să deosebim demonstrațiile adevărate de cele false?

Considerînd acum logica matematică în ea însăși, ca un aparat matematic bine constituit, observăm ușor că problema centrală a acestei științe este aceea notată de Mostowski cu numărul 2. Această problemă se poate enunța în mod simplu astfel: *care este mecanismul logico-matematic al deducției și ce îl justifică?*

Că scopul principal al logicii matematice este de a face o teorie a deducției, aceasta apare în mod explicit chiar în *Principia Mathematica* de Whitehead și Russell. Calculul propozițional este numit în această lucrare „teoria deducției"; introducînd apoi noțiunea de funcție propozițională și cuantificarea ei (cu variabile aparente și teoria tipurilor), autorii arată că fac o „extensiune a teoriei deducției". Nu numai atît, dar L. Wittgenstein a arătat că toate formulele adevărate ale logicii matematice sînt „scheme deductive" [3],

[1] *Elemente de logică matematică*, trad. din limba rusă, p. 9 (Ed. Științifică, București, 1966).

[2] A. Mostowski și un colectiv, *The Present State of Investigations on the Foundations of Mathematics* (Polska Akademia Nauk, Varșovia, 1965).

[3] L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus* (prop. 6.1262) (Paul Kegan, Londra, 1933).

concluzie preluată de F. Waismann[4] și dezvoltată de noi într-un studiu întreg [5].

Nu vom merge mai departe pentru a cita și alți autori în această chestiune. Problema centrală a logicii matematicii este, în primul rînd, problema deducției, deducție care justifică adevărurile matematice și le face necesare, cu o necesitate care îi apare lui F. Gonseth *„presque divine"*.

Într-adevăr, propozițiile matematice se bucură de două caractere specifice:

1. *ele sînt adevărate;*
2. *ele sînt necesare.*

Sarcina deducției logico-matematice va consta, deci, din a arăta că deducția făcută după schemele formale, pe care ea le stabilește, conduce la propoziții *adevărate* și *necesare*.

Vom arăta, în ceea ce urmează, că deducția logico-matematică își poate atinge doar parțial scopul.

II. DEDUCȚIA SILOGISTICĂ

Primul care a examinat deducția sub aspectul acesta dublu, de procedeu logic care conduce la *adevăruri necesare*, a fost Aristotel. Forma acestei deducții este, după el, silogismul. Iată ce scrie el în *Primele analitice*[6]: „Silogismul este un discurs (λόγος) în care unele lucruri fiind date, altceva decît ceea ce este dat *rezultă în mod necesar* (ἐξ ἀνάγκης) prin simplul fapt al celor date". În acest enunț, destul de simplu, apar însă o mulțime de preciziuni, care nu au fost, în general, luate în considerare[7], dar noi vom insista acum numai asupra faptului că deducția concluziei se face în mod necesar. Aristotel însuși insistă, de altfel, asupra caracterului *necesar* pe care-l are deducția silogistică, și iată cum explică el, mai departe, silogismul[8]: „Cînd trei termeni sînt între ei în raport în așa fel că minorul este conținut în totalitatea celui mediu, și cel mediu este conținut, sau nu este conținut, în totalitatea majorului, atunci există *cu necesitate* între extreme silogism perfect". Stagiritul numește silogism *perfect*[9] acela care nu are nevoie de nimic altceva decît ceea ce este dat în premise „pentru ca

[4] F. Waismann, *Ist die Logik eine deduktive Theorie? Erkenntnis* (Bd. 7, H. 4, 1938, Haga).

[5] A. Dumitriu, *Știința logicii*, v. în volumul de față.

[6] *Primele analitice*, I, 1, 24 b. Dăm textul grecesc: συλλογισμὸς δέ ἐστι λόγος ἐν ᾧ τεθέντων τινῶν ἕτερόν τι τῶν κειμένων ἐξ ἀνάγκης συμβαίνει τῷ ταῦτα εἶναι. Iată traducerea lui Aulus Gellius în *Noctes atticae*, XV, 26, 2: *Syllogismus est oratio in qua concessis quibusdam ex concessis aliud quid quam concessa sunt, per ea, quae concessa sunt, necessario conficitur.*
În ambele texte apare expresia ἐξ ἀνάγκης (urmează cu necesitate) sau în latinește, cu același sens, *necessario conficitur.*

[7] Am subliniat aceste precizări în lucrarea noastră *Istoria Logicii*, 8, 8 (Editura didactică și pedagogică, București, 1969).

[8] *Primele analitice*, I, 4, 25 b, 30–35.

[9] *Op. cit.*, I, 1, 24 b, 20–25.

necesitatea concluziei să fie evidentă"; silogismul este *imperfect* dacă are nevoie de unul sau mai multe lucruri, „care, este adevărat, rezultă în mod necesar din termenii dați, dar nu sînt explicit enunțate în premise". Aceste „lucruri", care sînt implicit enunțate în premise, sînt propozițiile obținute cu ajutorul inferențelor imediate, prin conversiune, prin contrapoziție, cu ajutorul cărora silogismele din celelalte figuri sînt reduse la prima figură (perfectă).

În rezumat, mecanismul deducției ia, în fond, formele silogistice ale primei figuri, pe care scolasticii le vor desemna prin cuvintele artificiale: *Barbara, Celarent, Dario, Ferio.*

Două probleme trebuie lămurite în privința acestor moduri ale primei figuri: (1) de ce concluzia este necesară și în ce sens; (2) dacă demonstrația acestei necesități este lipsită de orice critică.

III. DEDUCȚIA NECESARĂ

Problemele pe care le-am ridicat mai sus au fost dezbătute deja de comentatorii antici, și au fost reluate în timpul nostru. Le vom expune pe scurt, pentru a preciza unele nuanțe.

În privința *necesității* concluziei, trebuie să arătăm că Aristotel a făcut o distincție netă între modalitatea *„necesară"* a unei propoziții și *concluzia necesară* a unui silogism. Deosebirea dintre aceste două feluri de necesități ne apare ca fiind deosebirea dintre *„necesitatea relativă"* și *„necesitatea absolută"*. „Concluzia nu este necesară în mod absolut — scrie el —, ci ea este necesară prin premisele date." [10] Cu alte cuvinte, dacă se pleacă de la propoziții modale necesare, deducția va produce în mod necesar concluzii avînd modalitatea „necesară". Aceste concluzii vor fi necesare în mod absolut, pe cînd din premise asertorice se vor deduce *în mod necesar* concluzii asertorice, fără însă a avea modalitatea necesară.

Aristotel numește cele două necesități astfel [11]: *necesitatea relativă* — τίνων ὄντων ἀναγκαῖον (necesitatea față de altceva existent); *necesitatea absolută* — ἁπλῶς ἀναγκαῖον (necesitatea simplă).

Să vedem cum demonstrează Aristotel necesitatea concluziei, necesitate relativă, concluzia decurgînd cu necesitate — ἐξ ἀνάγκης — din premise, dar neavînd ea însăși modalitatea „necesară" — ἀνάγκη.

Problema ia două aspecte: (1) demonstrația prin care silogismele din celelalte figuri *se reduc* la prima figură; (2) demonstrația silogismelor din prima figură.

Dar se poate obiecta că dacă orice demonstrație ia forma unui silogism, atunci a demonstra, fie reducerea silogismelor la prima figură, fie validi-

[10] *Op. cit.*, I, 10, 30 b.

[11] *Primele analitice*, I, 10, 30 b. *Analiticele secunde*, II, 11, 94 a. Distincția de care vorbim a fost precizată de Alexandru din Aphrodisia, de exemplu, a fost reluată în timpul nostru de H. Maier, în *Die Syllogistik des Aristoteles*, și de alții. O discuție critică se găsește în lucrarea lui G. Patzig, *Die aristotelische Syllogistik* (Göttingen, 1958). El face o interpretare riguroasă a deosebirii aristotelice dintre „propoziția necesară" și „propoziția din necesitate" (*op. cit.*, II).

tatea silogismelor primei figuri, este o demonstrație circulară care nu demonstrează nimic și, prin urmare, formele silogistice nu sînt demonstrate și ca atare concluzia nu decurge cu necesitate din premise. Această obiecție a fost ridicată de Petrus Ramus [12] și de Leibniz [13]; ea nu ia în considerație însă procedeele întrebuințate de Aristotel în reducerea și demonstrația modurilor silogistice, care nu sînt demonstrații silogistice. Într-adevăr, pentru a reduce silogismele celorlalte figuri la prima figură, Stagiritul întrebuințează trei procedee care nu sînt silogistice: (1) inferențele imediate (transformarea directă a propozițiilor unui silogism în altele, prin conversiune și transpoziție); (2) reducerea la absurd; (3) *ecteza* [14]. Așadar, nu există circularitate în demonstrațiile validării formelor silogistice, și concluziile acestor forme valabile urmează *in mod necesar* fiindcă ele sînt demonstrate.

Diferitele deducții silogistice au fost numite de cei vechi *„raționamente demonstrate"*.

IV. DEDUCȚIA NON-NECESARĂ

Alături de „deducția demonstrată", stoicii au introdus „deducția nedemonstrată". Ei împărțeau tipurile de argumente în două categorii [15]:

1. *Argumente demonstrate* — τρόποι ἀπόδεικτοι;
2. *Argumente nondemonstrate* — τρόποι ἀναπόδεικτοι.

Argumentele apodeiktoi sînt diversele tipuri de silogisme, demonstrate de Aristotel în *Primele analitice*.

Argumentele anapodeiktoi sînt tipurile specifice logicii stoice, dintre care cel mai simplu este *modus ponens*, forme de raționament dezvoltate de logica matematică actuală.

Diogenes Laertios [16] ne spune că Chrysippos a socotit că există cinci tipuri de astfel de raționamente, iar Sextus Empiricus [17] confirmă și el numărul de cinci forme care ar fi fost fundamentale în logica stoică, „la care [stoicii] par a le reduce pe toate celelalte".

Iată aceste tipuri de bază ale deducției nondemonstrate, așa cum le redă Sextus Empiricus:

1. Primul argument este acela care deduce consecventul din propoziția nonsimplă ipotetică și din antecedent.

[12] Petrus Ramus, *Animadversiones in dialecticam Aristotelis* (Paris, 1543).

[13] Leibniz, *Nouveaux Essais sur l'Entendement Humain*, IV, II, 1 (Amsterdam, 1765).

[14] J. Łukasiewicz, in *Aristotle's Syllogistic*, § 19 (ed. a III-a, Oxford, 1958), a examinat mai de aproape proba nesilogistică numită *ecteză* — ἔκθεσις, cu ajutorul căreia Aristotel a demonstrat legile conversiunii. Ecteza constă din a adăuga termenilor dați un alt termen nou care este „extras" din cei dați. Acesta este, de altfel, sensul cuvîntului ἔκθεσις, „extracție".

[15] Sextus Empiricus, *Adversus mathematicos*, VIII, 223 și *Pyrrhonienses Hypotyposes*, II, 156; Diogenes Laertios, *Viețile și doctrinele filosofilor*, VII, 79. Stoicii clasificau raționamentele și din alte puncte de vedere, care însă nu ne interesează aici.

[16] *Op. cit.*, VII, 79.

[17] Sextus Empiricus, *Pyrrhonienses Hypotyposes*, II, 157.

În simbolurile logicii actuale acesta este *modus ponens* și se scrie:

$$\frac{\begin{matrix} p \supset q \\ p \end{matrix}}{q}$$

2. Al doilea argument este acela care deduce opusul antecedentului din propoziția nonsimplă ipotetică și opusul consecventului.

În simbolurile actuale:

$$\frac{\begin{matrix} p \supset q \\ \sim q \end{matrix}}{\sim p} \quad \text{sau} \quad p \supset q \cdot \supset \cdot \sim q \supset \sim p$$

3. Al treilea argument este acela potrivit căruia, din negarea unei conjuncții și a uneia din părțile ei, se conchide cealaltă parte.

În simboluri:

$$\frac{\begin{matrix} \sim (p \& q) \\ \sim p \end{matrix}}{q} \quad \begin{matrix} \text{sau} \quad p \& q \cdot \supset \cdot \sim p \supset q \\ \text{sau} \quad p \supset \sim q \cdot \supset \cdot \sim p \supset q. \end{matrix}$$

4. Al patrulea argument este acela care, dintr-o judecată disjunctivă (exclusivă) și din afirmarea uneia din părțile ei componente, se conchide contradictoria celeilalte părți.

În simboluri:

$$\frac{\begin{matrix} p \vee q \\ p \end{matrix}}{\sim q}$$

5. Al cincilea argument este acela potrivit căruia dintr-o judecată disjunctivă și contradictoria uneia din părțile componente conchide la afirmarea celeilalte.

În simboluri:

$$\frac{\begin{matrix} p \vee q \\ \sim p \end{matrix}}{q}$$

Stoicii formulau aceste raționamente după „forma" lor, care pentru ei era „figura" raționamentului, în care nu apărea nici un conținut, forma logico-gramaticală, părțile putînd fi însemnate astfel cu numere: „dacă primul, atunci al doilea..." Acest lucru ne este confirmat de mai multe texte.[18] Iată ce scrie Apuleius în acest sens[19]: „Stoicii, pe de altă parte, întrebuințau

[18] Diogenes Laertios, *op. cit.*, VII, 80; Apuleius, *De dogmate Platonis*, III; Boethius, *De syllogismo hypothetico* etc.

[19] *Op. cit.*, III. Iată textul latin: *Stoici porro pro litteris numeros usurpant ut si primum, secudum; atqui primum; secundum igitur.*

în locul a ceea ce este scris numere ca « *dacă primul, atunci al doilea, dar primul, deci al doilea* »".

Iată cele cinci tipuri de raționamente ipotetice, schematizate cu numere, așa cum făceau stoicii:

I. Dacă primul, atunci al doilea
Dar primul
____
Atunci al doilea

II. Dacă primul, atunci al doilea
Dar nu al doilea
____
Deci nici primul.

III. Nu în același timp primul și al doilea
Dar primul
____
Deci nu al doilea.

IV. Sau primul sau al doilea
Dar primul
____
Deci nu al doilea.

V. Sau primul sau al doilea
Dar nu al doilea
____
Deci primul.

Cu aceste cinci tipuri simple de argumente — λόγοι ἁπλοῖ — se pot forma o mulțime de argumente asemănătoare nonsimple — οὐχ ἁπλοῖ —, care se reduc toate la aceste cinci tipuri fundamentale, cum ni se spune că a arătat amănunțit Chrysippos (utilizînd forme de reducere, simplificate mult de Antipatros).

Toate aceste raționamente ipotetice, care formează baza calculului propozițional actual, erau considerate ca valabile fără demonstrație. Cum explicau stoicii faptul că aceste raționamente erau acceptate fără demonstrație? Mai întîi ei considerau că un raționament este corect numai din punct de vedere formal. Din cauza aceasta ei socoteau că silogismele aristotelice, deși corecte din punct de vedere *material*, erau incorecte din punctul de vedere *formal*.[20] Cu toate acestea, problema trebuie să se fi pus și pentru ei, anume necesitatea de a explica formele ipotetice de raționament. Logicieni de talia lor nu puteau să nu fie conștienți de faptul că formele care asigurau deducția nu erau demonstrate, și deci *necesitatea concluziei era asigurată de forme de raționament a căror necesitate nu era dovedită*. Ei înșiși și-au dat seama că argumentele nedemonstrate sînt argumente nedemonstrabile. Într-adevăr, termenul ἀναπόδεικτος *(anapodeiktos)* înseamnă „nedemonstrabil", dar și „nedemonstrat" [21].

[20] Alexandru din Aphrodisia, *Ad analytica priora commentarium*.
[21] Vezi nota lui Aram Frenkian la traducerea *Schițelor pyrrhoniene*, p. 93 (București, 1965).

Textul lui Sextus Empiricus cuprinde o observație care este lămuritoare în această privință [22]: *„Aceste argumente sînt acelea de care ei spun că nu trebuie demonstrate pentru a fi stabilite, căci ele servesc drept probe pentru concludența celorlalte argumente".* Cu alte cuvinte, ei acceptă teza aristotelică că, pentru a nu cădea într-un *regressus in infinitum*, trebuie să ne oprim undeva, și că totul nu poate fi demonstrat. Dar, pentru formele de raționament ipotetic, ei acceptă o serie (cinci la număr) dintre ele pe care le admit fără demonstrație (axiomatic) și pe care le declară „nedemonstrate" și „nedemonstrabile". Cu acestea, după cum am spus, ei au reușit să formuleze o serie imensă de alte forme ipotetice de deducție.

Vom sublinia acum deosebirea fundamentală a acestor forme de deducție față de formele silogistice:

Pe cînd concluzia silogistică este necesară — ἐξ ἀνάγκης —, concluzia raționamentului stoic nu este necesară, ci numai ipotetică, ἐξ ὑποθέσεως. Prima este necesară, fiindcă decurge în mod necesar din premise, și această necesitate se datorește faptului că ea este demonstrată; a doua este ipotetică, fiindcă nu este demonstrată, ci acceptată fără nici o dovadă.

Acest rezultat nu trebuie înțeles în sensul că concluzia raționamentului stoic are modalitatea „ipotetică", ci în sensul că mecanismul deductiv prin care ea este obținută nu este demonstrat — stoicii spuneau că nici nu este demonstrabil.

După cum explicația lui Aristotel a arătat că, deși decurge cu necesitate, concluzia unui silogism nu are modalitatea „necesar", tot astfel concluzia raționamentului „nedemonstrat" nu are modalitatea „ipotetic", ci este *adevărată*, dar nu este obținută în mod necesar.

V. DEDUCTIO PER ACCIDENS

Rezultatele la care am ajuns mai sus, într-un mod general, pot fi explicate și mai bine apelînd tot la cîteva pasaje din Aristotel.

Deducția stoică presupunea că, în mecanismul logic al deducției, antecedentul — sau premisele — pot fi false. Acest simplu fapt arată că acest mecanism deductiv are o particularitate pe care o vom explicita în cele ce urmează, și care va fi o confirmare a tot ce am spus pînă aici.

Stagiritul se ocupă de cazul cînd tragem o concluzie falsă din premise adevărate și de acela cînd tragem o concluzie adevărată din premise false [23], cu privire la toate cele trei figuri. Iată ce scrie el [24]: „Se poate ca premisele care formează silogismul să fie adevărate; se poate, de asemenea, ca ele să fie false, sau ca una să fie adevărată și alta falsă. Concluzia este în mod necesar sau adevărată sau falsă. *Din premise adevărate nu se poate scoate o concluzie falsă, dar din premise false se poate scoate o concluzie adevărată, cu rezerva că ea se va referi nu la «pentru ce», ci la ceea ce este în fapt. Aceasta deoarece «pentru ce» nu poate face obiectul unui silogism cu premise false."* Nu vom reproduce aici întreaga argumentație a lui Aristotel, care presupune și referințe la alte opere ale lui, cum este *Metaphisica*, și

[22] *Op. cit.*, 156.
[23] *Primele analitice*, II, 2, 3, 3.
[24] *Op. cit.*, IV, 2, 53 b.

care examinează o astfel de deducție (din premise false) în toate cele trei figuri cu toate detaliile. În principiu, explicația celor două feluri de silogisme este rezumată de Waitz [25], Trendelenburg [26] și Tricot [27], după cum urmează.

Aristotel pleacă de la distincția care există între a explica „ceea ce este în fapt", explicație indicată de conjuncția ὅτι (deoarece) și explicația prin „cauza care determină", indicată de conjuncția διότι (din cauză că) [28]. Dar, spune el, deoarece din premise false poate decurge și adevărul și falsul, urmează că acestea dau naștere la o explicație de fapt a concluziei, și nu la o explicație cauzală a ei. Tricot scrie în acest sens, în acord cu Waitz și Trendelenburg: „Din moment ce concluzia, cu toate că este adevărată, nu decurge din premise adevărate, nu poate fi vorba de o explicație prin cauză, ci de enunțarea unui simplu fapt".

Examinînd diverse tipuri de silogisme, Aristotel conchide [29]: „Se vede dar că, dacă concluzia este falsă, propozițiile de unde pleacă raționamentul trebuie să fie în mod necesar false, fie toate, fie numai unele; dimpotrivă, cînd concluzia este adevărată, este necesar ca premisele să fie adevărate, fie că este vorba de una singură dintre ele sau de toate; *dar este posibil ca nici una din părțile silogismului să nu fie adevărată și totuși concluzia să fie adevărată, numai că nu este adevărată într-un mod necesar.* Motivul este că, două lucruri fiind între ele în așa fel, că existența unuia antrenează în mod necesar existența celuilalt, nonexistența ultimului va antrena nonexistența primului, *pe cînd existența ultimului nu va antrena în mod necesar existența primului.* Este însă imposibil ca existența și nonexistența aceluiași lucru să antreneze în mod necesar existența unuia și aceluiași lucru." Cu alte cuvinte, rezumă Tricot [30] acest raționament, „este imposibil ca un consecvent (*B*), care derivă în mod necesar dintr-un antecedent (*A*), să derive în mod necesar din contradictoriul aceluiași antecedent (non-*A*). Dacă este adevărat că *si est homo est animal* (dacă cineva este om, este animal), nu se poate spune *si non est homo, est animal* (dacă nu este om, este animal)". Vom adăuga, la ce spune Tricot, că totuși concluzia poate fi adevărată, *dar nu în mod necesar.* Cu alte cuvinte, se poate spune, în anumite cazuri date, adică de fapt, că „dacă cineva nu este om, este animal", dar aceasta este adevărat numai întîmplător, și nu în mod necesar. Acest rezultat este subliniat de Tricot într-un mod foarte pregnant [31]: „Este imposibil ca o concluzie să decurgă din premise false, altfel decît *per accidens*".

Vom mai adăuga numai că aceste concluzii sînt în acord cu întreaga concepție a lui Aristotel despre natura silogismului, a demonstrației, și a științei în general. Într-adevăr el scrie [32]: „Cunoașterea demonstrată tre-

[25] Th. Waitz, *Aristotelis Organon graece*, 2 vol., p. 483 (Leipzig, 1844–1846, I).

[26] A. Trendelenburg, *Elementa logicae Aristotelis*, p. 107 (Berlin, 1836).

[27] J. Tricot, trad. *Primelor analitice*, p. 209–233 (Paris, 1936).

[28] *Metafizica*, A, I, 1, 981 a.

[29] *Primele analitice*, II, 4, 57 a–57 b.

[30] *Op. cit.*, p. 232.

[31] *Op. cit.*, p.233. Tricot arată, în același loc, citînd pe Julius Pacius, *In Porphyrii isagogen et Aristotelis Organum Commentarium*, 215, că, dacă se presupune că concluziile din premise false sînt în mod necesar adevărate, atunci se ajunge la afirmații contradictorii.

[32] *Analiticele secunde*, I, 2, 71 b.

buie să rezulte din premise *adevărate,* prime, nemijlocite, cunoscute mai bine și mai înainte decît concluzia *ale cărei cauze sînt"* — αἰτίων τοῦ συμπεράσματος. În alte condiții, nu avem cunoaștere demonstrată sau necesară, ci o deducție de fapt sau prin accident.

VI. CONCLUZII

Examenul precedent ne-a impus concluzia că raționamentele de tip stoic nu conduc în mod necesar la concluzii, ci concluziile sînt obținute *ca adevăruri de fapt.* Mai precis, rezultatele la care se ajunge prin astfel de procedee logice sînt simplu adevărate, dar nu decurg în mod necesar. Acest lucru era cunoscut logicienilor scolastici, care, preluînd și dezvoltînd aceste mecanisme logice deductive, pe care le-au numit „consecințe" — *consequentiae* — au arătat că există două feluri de astfel de consecințe: (1) *consequentia formalis*; (2) *consequentia materialis* [33].

Consecința validă *(bona)* în virtutea formei — *de forma* — este aceea care, dacă semnifică în mod adecvat prin antecedent, semnifică în mod adecvat prin consecvent.

Consecința materială validă — *materialis bona* — este aceea al cărei consecvent nu este consecvent în virtutea înțelesului formal al antecedentului.

Un exemplu de o astfel de *consequentia bona materialis: Homo est asinus, ergo baculus stat in angulo* („Omul este un măgar, deci bățul se află în colț").

Orice consecință formală este valabilă și material, dar nu și invers (regulă scolastică).

Regula fundamentală a consecinței materiale este următoarea: *Ex falsis verum ex veris nil nisi verum* (Din [propoziții] false adevărul, din [propoziții] adevărate nimic decît adevărul").

Aceste lucruri au fost repuse în discuție în timpul nostru de C. I. Lewis.[34] Acesta a făcut o critică noțiunii de implicație, așa cum este definită de Russell [35], care permite inferențe bizare *(queer)*, implicație pe care el o numește, ca și logicienii scolastici, implicație materială. Să considerăm exemplul dat mai sus de scolastici, implicația *„Homo est asinus,*

[33] Scolasticii au închinat tratate întregi teoriei consecințelor, dintre care cel mai cunoscut este acela al lui Radulphus Strodus, purtînd chiar titlul *Consequentiae* (tipărit la Veneția, 1488).

[34] C. I. Lewis, *A Survey of Symbolic Logic* (Berkeley, 1918).

[35] A. N. Whitehead și B. Russell, *Principia Mathematica* (vol. I, 1910, vol. II, 1912, vol. III, 1913).

ergo baculus stat in angulo". Această implicaţie este adevărată, fiindcă primul membru este fals; dar din fals se deduce adevărul; deci *baculus stat in angulo* este o propoziţie adevărată, şi deoarece este adevărată de fapt, deducţia este valabilă. Numai că, după cum se vede, concluzia nu decurge în mod necesar, ci de fapt. De unde rezultă aceste consecinţe care par arbitrare şi bizare? Lewis conchide că aceste consecinţe se datoresc faptului că implicaţia lui Russell este o implicaţie în extensiune, fără nici o relaţie analoagă în intensiune. Inferenţa însă depinde, după el, de înţelesul *(meaning)* propoziţiilor; de aceea ea este o relaţie în intensiune. În condiţiile acestea, implicaţia russelliană îi apare lui Lewis ca o implicaţie materială, deoarece numai în cazurile materiale date se poate stabili o inferenţă reală, altfel ea nu spune nimic şi din această cauză este *contingentă*. Acest lucru, după cum am văzut, a fost spus, într-o formă mult mai pregnantă, de Aristotel. Soluţia pe care a propus-o Lewis a constat în introducerea modalităţilor, ca valori ale propoziţiilor, pentru a putea ajunge la propoziţii necesare. Atît el cît şi alţi logicieni, care au construit sisteme formale deductive cu ajutorul modalităţilor, nu au ţinut seama de precizările făcute de Aristotel, prin care distingea propoziţia necesară (ἀνάγκη) de aceea obţinută cu necesitate (ἐξ ἀνάγκης). Prin introducerea modalităţilor în desfăşurarea deducţiei nu se arată decît raportul dintre propoziţii modale, dar adevărurile matematice nu sînt niciodată exprimate prin propoziţii modale. Mai mult încă, deducţia propoziţiilor modale este tot *contingentă*, adică tot de fapt, fiindcă se sprijină pe raporturile dintre propoziţii false, adevărate, posibile, necesare, imposibile. Deducţia lui Aristotel impunea, după cum am văzut, ca premisele să fie *adevărate*, şi atunci, cu necesitate concluzia este adevărată. În caz contrar, ea nu poate fi adevărată cu necesitate.

Dar ceea ce este absolut remarcabil şi confirmă în întregime analiza noastră, este că toate propoziţiile unei teorii matematice — absolut toate — sînt adevărate. Acest lucru a fost observat de matematicianul român Octav Onicescu, care a şi schiţat ca urmare un sistem logic cu o singură valoare (adevărul), capabil să dea seamă, după el, de articulaţia deductivă a propoziţiilor unei teorii matematice.[36]

Prin urmare este imposibil să explicăm mecanismul logic al matematicilor cu ajutorul logicilor modale sau cu ajutorul logicii bivalente (nemodale).

Totuşi logica matematică nu a renunţat la implicaţia materială şi la formele dezvoltate cu ajutorul ei. Ea s-a dezvoltat în acest sens, şi cu aparatul logistic construit în modul acesta, adică transformînd întreaga teorie a deducţiei într-un sistem formal deductiv, a căutat să fundamenteze întreaga matematică. Ce a putut să realizeze însă în modul acesta? Acestui mod de a fundamenta matematicile, în special deductibilitatea adevărului din aceste discipline, îi scapă însă unul din caracterele adevărurilor matematice, pe care le-am menţionat la începutul studiului nostru: că ele se obţin *în mod necesar*.

[36] Octav Onicescu, *Principes de logique et de philosophie mathématique* (Bucarest, 1971).

Deducția necesară și contingentă

Lăsînd la o parte alte probleme, care s-au ridicat pe parcursul construirii logicii matematice, considerată numai ca instrument deductiv al științelor matematice, observăm că ea are capacitatea de a deduce *adevărul* propozițiilor matematice, dar nu și *necesitatea* — „aproape divină" — a acestor adevăruri. Cu alte cuvinte, logica matematică poate arăta că o propoziție matematică este *adevărată de fapt*, dar nu și motivul (διότι), care o face *în mod necesar adevărată*. În felul acesta, deducția necesară s-a transformat într-o *deducție contingentă*. Aceasta înseamnă însă că aparatului deductiv al logicii simbolice îi scapă tocmai ceea ce formează natura și esența matematicilor.

Notre Dame Journal of Formal Logic, 3, Notre Dame, S.U.A., 1979.

Antinomia mincinosului

I. INTRODUCERE

Antinomia mincinosului, care pare să fi fost construită de megaricul Eubulides, după ce a tulburat pe logicienii greci, și apoi pe cei din Evul Mediu, a provocat o mare neliniște și în timpul nostru, în special în rîndurile logicienilor matematicieni. După cum se știe, Chrysippos a scris mai multe tratate despre mincinos [1], și chiar Aristotel i-a acordat o oarecare atenție; logicienii scolastici au scris numeroase lucrări asupra acestei probleme, într-un capitol important din logică, purtînd titlul *Insolubilia*, în care „mincinosul" era formulat în diverse variante.[2]

În epoca noastră, Bertrand Russell, intîlnind în teoria sa logico-matematică a fundamentelor matematice unele contradicții sau paradoxe, a recunoscut că ele sînt toate de același tip cu antinomia mincinosului. De la apariția monumentalei sale lucrări *Principia Mathematica* (primul vol. 1910, scris împreună cu A. N. Whitehead), numeroși sînt cei care au propus noi contribuții în această problemă, dar eforturile lor nu au depășit soluția lui Russell, ci numai au încercat să o perfecționeze. Așa sînt studiile remarcabile ale lui R. Carnap [3], A. Tarski [4] ș.a.

[1] Diogenes Laertios, *Viața și doctrinele filosofilor*, VII, 180. În Antichitate, paradoxul mincinosului a fost considerat ca fiind foarte important, după cum o dovedește marele număr al filosofilor ce au încercat să-l soluționeze. Aristotel se ocupă de el în *De sophisticis elenchis* (25), *Ethica nicomachică* (VII, 3) și în *Metafizica* (IV, 4, și 8); celebrul logician stoic Chrysippos pare să fi scris cel puțin șapte tratate asupra mincinosului; Cicero îl citează în *Libri academici* (II, 29); Seneca (*Epistolae ad Lucilium*, 45) menționează că „multe cărți au fost scrise despre el"; Aulus Gellius tratează acest subiect pe larg în *Noctes atticae* (XVIII, 2); Plutarch îl menționează în lucrarea lui *Contradicțiile stoicilor* (2, și 24) ș.a.m.d. Această *aporie*, cum o numește Aristotel, reapare în Evul Mediu; cele mai importante tratate asupra acestui subiect sînt acelea ale lui Buridan, Albertus de Saxonia, Petrus de Allyaco, Paulus Nicolettus Venetus ș.a.

[2] A se vedea pentru aceste variante: *Istoria logicii*, cap. XXIII (ediția a II-a, Editura didactică și pedagogică, 1975).

[3] Rudolf Carnap, *Logische Syntax der Sprache* (Springer, Viena, 1934).

[4] Alfred Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen* („Studia Philosophica", Leopoli, 1935).

În ceea ce privește literatura mai nouă asupra acestei probleme, avem cartea *The Paradox of the Liar*, editată de Robert L. Martin [5], precum și un articol al lui John F. Post [6].

II. PARADOXUL ȘI PRINCIPALELE LUI SOLUȚII

Formularea antinomiei mincinosului în Antichitate era următoarea: „*Minte cineva cînd spune că minte?*" Este evident că nu există decît două răspunsuri posibile: 1. minte; 2. nu minte.

1. Dacă cineva *minte*, atunci nu minte cînd spune că minte, deci *nu minte*.

2. Dacă cineva *nu minte*, cînd spune că minte, atunci *minte*.

Contradicția este manifestă: dacă *minte*, *nu minte*; dacă *nu minte minte*.

O altă formă a acestui paradox era „argumentul reciproc", numit de greci *antistréphon* și de latini *reciprocum*. Este așa fel construit că el poate fi întors și întrebuințat, cu aceeași forță, împotriva aceluia care îl folcsește. Diogenes Laertios[7] citează un astfel de argument ca pe un fapt real din viața lui Protagoras. Aulus Gellius [8] îl expune după cum urmează: Protagoras fusese angajat ca profesor de către Eulathus, discipolul trebuind să-i plătească onorariul atunci cînd va fi cîștigat primul său proces. Totuși, timpul trecea și Eulathus nu voia să ia nici un proces, astfel că nu avea nici o obligație de plată față de profesorul său. Dîndu-și seama de înșelătorie, Protagoras a chemat în judecată pe Eulathus, utilizînd următorul argument: „Dacă vei cîștiga, va trebui să-mi plătești în baza contractului nostru, deoarece ai cîștigat primul tău proces; dacă pierzi, va trebui să-mi plătești conform sentinței tribunalului". Discipolul său, Eulathus, i-a întors argumentul în felul următor: „Dacă pierd procesul, nu va trebui să-ți plătesc onorariul, deoarece contractul prevede că va trebui să-ți plătesc numai cînd voi cîștiga primul meu proces; dacă-l cîștig, nu voi fi forțat să-ți plătesc prin sentința tribunalului".

Există multe alte variante ale acestui fel de paradox, unele construite în timpul nostru, cum este, de exemplu, acela al lui Gonseth.[9]

Logicienii scolastici au formulat această antinomie în 14 variante (și, în plus, încă cinci referitoare la unele acte interioare) după cum apare în

[5] *The Paradox of the Liar*, editat de Robert L. Martin (Yale University Press, New Haven and London, 1970). Lucrarea conține 10 studii, după cum urmează: Alan R. Anderson, Keith S. Donnellan, Frederic B. Fitch, Bas C. Van Fraassen, Newton Garver, Hans Herzberger, John Kearns, Robert L. Martin, John Pollock, Brian Skyrms. Acest voum conține o introducere istorică de A. R. Anderson și schițează programul pentru o posibilă soluție.

[6] J. F. Post, *Shades of the Liar* („Journal of Philosophical Logic", 2, 1973, p. 370–386).

[7] *Op. cit.*, IX, 56.

[8] *Op. cit.*, V, 10.

[9] F. Gonseth, *Les Fondements des mathématiques*, p. 214 (Edition Blanchard, Paris, 1926).

tratatul lui Albertus de Saxonia [10]. Vom cita, dintre acestea, acele variante pe care le considerăm fundamentale, celelalte reducîndu-se la acestea.

1. *Ego dico falsum* — „Eu spun falsul".

2. *Propositio scripta in illo folio est falsa* — „Propoziția scrisă pe această foaie de hîrtie este falsă".

3. Forma *antistrephon* sau *reciprocum* — din procesul Protagoras — Eulathus are următoarea formulare scolastică: Socrate spune o singură propoziție: „*Plato dicit falsum*" și Platon spune o singură propoziție: „*Socrates dicit verum*"; care dintre aceste propoziții este adevărată și care falsă? Este evident că orice valoare de adevăr am acorda uneia din aceste propoziții, ea este anulată de cealaltă, și prin aceasta se arată caracterul „insolubil" al acestor propoziții (ca și în cazul mincinosului).

Care sînt soluțiile principale oferite pînă acum?

Prima soluție pare să fie aceea a lui Aristotel. Nu aceea din *De sofisticis elenchis*, ci aceea dată în *Metafizica* [11]. El scrie: „Acela care afirmă că totul este adevărat, dă putere de adevăr și afirmației contrare, de unde rezultă că propria lui afirmație este falsă. Și acela care afirmă că totul este fals, afirmă că și propria lui aserțiune este falsă." Să detaliem soluția lui Aristotel. Să presupunem că enunțăm propoziția universală.

1. Toate propozițiile sînt adevărate.

Să formulăm acum propoziția:

2. Propoziția (1) este falsă.

Propoziția (1) antrenează adevărul propoziției (2) și propoziția (2) antrenează falsitatea propoziției (1). Deci, dacă (1) este *adevărată*, (2) este adevărată de asemenea, și atunci (1) este *falsă*, ceea ce este o contradicție.

În același mod, să considerăm propoziția universală a mincinosului:

(3) Toate propozițiile sînt false.

Să scriem acum propoziția următoare:

(4) Propoziția (3) este adevărată.

Propoziția (3) antrenează falsitatea propoziției (4) și aceasta antrenează falsitatea propoziției (3). Așadar, dacă (3) este *adevărată*, (4) este falsă, și atunci (3) este *falsă*, ceea ce este o contradicție.

Cu alte cuvinte, există propoziții care, cu toate că în mod aparent nu prezintă nici un pericol logic, conțin totuși o contradicție ce poate fi explicitată mai mult sau mai puțin direct. Afirmațiile (1) și (2), sau (3) și (4), deși par ireproșabile, conțin totuși o contradicție care le anihilează.

Observație. Soluția lui Aristotel, așa cum a fost detaliată de noi mai sus, se reduce de fapt la o constatare simplă. Și cel care afirmă că toate propozițiile sînt adevărate, și cel care afirmă că toate propozițiile sînt false, pleacă de la următoarea axiomă, admisă implicit:

(1) Există două valori de adevăr ale propozițiilor, *A* (adevărul) și *F* (falsul).

Una din următoarele propoziții:

(2) Toate propozițiile sînt adevărate,

(3) Toate propozițiile sînt false,

[10] Albertus de Saxonia, *Perutilis logica* (tipărită pentru prima dată la Veneția, 1522)
[11] Aristotel, *Metafizica*, IV, 4, 1 008 a și IV, 8, 1 012 b.

admițînd numai o singură valoare de adevăr pentru propoziții, este contradictorie cu (1) și este respinsă de această axiomă.

Pe scurt, dacă presupunem că „există două valori de adevăr ale propozițiilor", nu putem să spunem apoi: „nu există decît o singură valoare de adevăr a propozițiilor". Aceasta este întreaga contradicție a mincinosului.

În ceea ce privește soluțiile scolastice, trei dintre ele rețin încă o dată atenția noastră.

(1) *Soluția lui Buridan.*[12] Această soluție, așa cum am văzut, cere „un timp" pentru oricare propoziție, ceea ce împiedică producerea paradoxelor de acest fel [13].

(2) *Soluția lui Albertus de Saxonia.*[14] După Albertus, eroarea făcută în problemele de acest fel constă în faptul că se ia partea drept întreg.

(3) *Soluția lui Petrus de Allyaco*[15] este bazată pe o distincție interesantă între propozițiile vocale sau scrise și propozițiile mentale. Numai propozițiile vocale sau scrise pot indica valoarea de adevăr a unei propoziții mentale.

Din timpul logicienilor Evului Mediu și pînă la apariția monumentalei opere *Principia Mathematica* nu ar mai fi nimic de spus. Antinomia mincinosului este pusă din nou în discuție, în această lucrare, de Bertrand Russell. Să considerăm, o dată cu el, propoziția p și declarația că p este falsă.

(1) p este falsă.

Să considerăm acum această nouă propoziție (1) și să o declarăm falsă:

(2) p este falsă este falsă.

Ce spune Russell? Că „falsă" din (1) nu are același nivel cu al doilea „falsă" din (2), ele trebuie deosebite, și nu pot fi considerate ca unul și același lucru. În propoziția (1) întrebuințăm un „tip" de adevăr care nu este identic cu al doilea. Dacă se face o astfel de „tipizare" a adevărului (și falsului), paradoxul mincinosului nu mai poate apărea, precum și celelalte înrudite cu acesta. Acestei soluții russelliene Tarski i-a dat o formă riguroasă și a demonstrat că o definiție formală corectă a propoziției adevărate nu poate fi construită într-un sistem formal, ci într-un sistem care are un nivel superior, adică care vorbește despre proprietățile primului (metasistemul sistemului).

III. ANALIZA UNUI ARGUMENT RECIPROC

Să reluăm problema din procesul dintre Protagoras și elevul său Eulathus. Dintre variantele acestui argument *antistrêphon* vom considera pe următoarea: Un filosof este condamnat la moarte de către un Calif, care îi acordă permisiunea să-și aleagă singur felul morții. „Dacă spui o minciună, vei fi spînzurat — spune Califul; dacă spui un adevăr, vei fi decapitat." După un timp, filosoful răspunde: „*Voi fi spînzurat*". Această propoziție,

[12] J. Buridan (m. 1358), în lucrarea sa *Summulae* (tipărită la Veneția, 1499).

[13] V. nota 17 la studiul nostru din volum: *Soluțiile contemporane și scolastice ale antinomiilor logico-matematice*.

[14] Albertus de Saxonia (m. 1390), în lucrarea lui *Perutilis logica*.

[15] Petrus de Allyaco (1350—1425) a scris un important tratat asupra problemei *Insolubilia*, tipărit pentru prima dată la Paris (1494).

aparent atît de simplă, conduce însă la o contradicție: dacă ea este adevărată, filosoful trebuie să fie decapitat, dar în acest caz, propoziția lui este falsă și, deci, trebuie să fie spînzurat! Dacă propoziția este falsă, filosoful trebuie să fie spînzurat, conform condiției puse de Calif, dar atunci această propoziție este adevărată și el trebuie decapitat! Propoziția filosofului: „*Voi fi spînzurat*" nu poate fi declarată nici adevărată, nici falsă, dar ea trebuie să fie sau adevărată sau falsă.

Să vedem mai întîi cum apare cercul vicios. Condițiile Califului erau: filosoful va spune o propoziție care, prin adevărul sau falsitatea ei, va determina modul său de execuție. Filosoful enunță o propoziție al cărei adevăr sau falsitate depind de modul său de execuție. Condițiile inițiale au fost schimbate. Califul spune:

(1) Modalitatea executării tale depinde de valoarea de adevăr a propoziției pe care o vei spune.

Filosoful spune:

(2) Valoarea de adevăr a propoziției mele depinde de modalitatea executării mele.

Cu alte cuvinte, Califul a stabilit un antecedent logic care va determina consecința sa, pe cînd filosoful schimbă problema, și propoziția lui ia ca antecedent logic ceea ce tocmai problema declarase ca fiind consecvent.

Criteriile (1) și (2) sînt considerate ca fiind identice, nu se face nici o distincție între ele, ca și cum ar fi un singur criteriu, de unde cercul vicios.

În general, fiind dată o problemă în care un rezultat este o consecință a adevărului sau a falsității unei propoziții p, se obține o *petitio principii* sau un *cerc vicios*, dacă facem să depindă valorile de adevăr ale propoziției p de însuși acest rezultat, adică dacă introducem un criteriu invers, în mod implicit sau explicit, în raport cu criteriul prin care sînt determinate valorile de adevăr ale lui p. Să notăm prin K_1 criteriul conform căruia consecințele dintr-o astfel de problemă sînt deduse. Să notăm prin K_2 criteriul care determină valorile de adevăr ale lui p. Pentru $K_1 \neq K_2$ nu poate exista nici o contradicție. Dacă nu se ține seamă de această condiție, se ajunge la o problemă iluzorie, în care nu se spune nimic și care apare sau ca o *tautologie*, sau ca o *contradicție*, și anume: dacă valoarea de adevăr a unei propoziții p este obligată să depindă de însăși consecința determinată de adevărul propoziției p, atunci avem o tautologie; dacă adevărul propoziției este făcut să depindă de însăși consecința determinată de falsitatea propoziției p, atunci avem o contradicție.

IV. MINCINOSUL

Paradoxul „Califul și filosoful" este un caz mai general decît acela al mincinosului.

Ce înseamnă „a fi un mincinos"? Înțelegem prin aceasta pe mincinosul absolut, care minte totdeauna, fără nici o excepție. *A minți în mod permanent înseamnă a afirma ca fiind adevărat ceea ce este fals, și ca fiind fals ceea ce este adevărat.* Pentru a putea minți, mincinosul trebuie să cunoască

dacă ceea ce va spune se referă la ceva fals sau adevărat; altfel, necunoscînd acest lucru, el poate să spună chiar adevărul, mințind la întîmplare, ceea ce este împotriva ipotezei. Mincinosul absolut își ia o obligație care este chiar definiția lui enunțată de *„Eu mint"*: orice propoziție, oricare ar fi ea, determinată prin valoarea ei de adevăr, este declarată de el falsă, și prin aceasta el îi dă o valoare contrară aceleia atribuită ei. Mincinosul poate opera această inversiune a valorii de adevăr a unei propoziții, utilizînd functorii de adevăr A și F (în fapt numai pe F) sau utilizînd negația, care este suficientă pentru intenția sa.

Cu alte cuvinte, prin propoziția sa: „Eu mint", mincinosul spune: „Adevărul sau falsitatea unei propoziții p determină falsitatea sau adevărul pe care le atribui eu propoziției p, oricare ar fi ea".

După cum se vede, și în acest caz există un antecedent și un consecvent, după cum am văzut în paradoxul „Califul și filosoful". Antecedentul logic este „valoarea de adevăr a propoziției p"; consecventul este „valoarea contrară de adevăr dată de mincinos propoziției p".

Invers, și noi avem un criteriu pentru a determina valorile de adevăr ale propoziției p pe care mincinosul le schimbă: orice propoziție declarată adevărată de mincinos va fi avut, independent de mincinos, valoare falsă, și orice propoziție, declarată falsă de mincinos, trebuie să fi fost adevărată.

(1) Criteriul mincinosului. Valoarea de adevăr a propoziției p oricare ar fi ea determină valoarea de adevăr pe care o atribui eu acestei propoziții p, anume într-un mod invers (prin negație).

(2) Criteriul independent de mincinos. Valoarea de adevăr atribuită de mincinos unei propoziții p, oricare ar fi ea, determină valoarea de adevăr atribuită acestei propoziții independent de mincinos, anume în sens invers (prin negație).

Prin urmare, orice propoziție p poate avea, în cadrul acestei probleme, fie o valoare de adevăr independentă de mincinos, fie valoarea de adevăr dată ei de către mincinos. Confundînd cele două criterii, și considerîndu-le ca fiind un singur criteriu, facem o confuzie între două valori de adevăr distincte, dar inverse, aceea a mincinosului și aceea independentă de mincinos; de unde apare contradicția exact ca și în cazul „Califul și filosoful".

Observație. Întreaga antinomie a mincinosului se reduce la aceste două propoziții contradictorii: Mincinosul spune:

(1) Nu există decît o singură valoare de adevăr pentru propoziții, anume falsul.

Încercînd să vedem dacă aserțiunea mincinosului este *adevărată* sau *falsă*, s-a admis implicit că există în fapt două valori de adevăr pentru propoziții. Astfel, în paradoxul mincinosului mai există implicit o aserțiune:

(2) Există două valori de adevăr ale propozițiilor, adevărul și falsul.

Aserțiunile (1) și (2) sînt contradictorii, dar ele funcționează simultan în paradox, fără a le distinge, și atunci nu este de mirare că aceasta creează iluzia unei antinomii.

Russell, și după el Carnap, Tarski ș.a. au remarcat că există o distincțiune între valorile de adevăr ale propoziției „Eu mint" și au conchis că există mai multe niveluri (tipuri) de adevăr și fals. Analiza noastră a arătat că această distincție este reală, dar ea este introdusă prin definiție între mincinos și cei care nu mint.

V. SOLUŢIA FORMALĂ

Vom considera că utilizăm aici sistemul formal din *Principia Mathematica* (pe scurt *PM*).

Am văzut că definiţia mincinosului este: acela care neagă valorile de adevăr date oricărei propoziţii p. Vom preciza semnul de definiţie din *PM* după cum urmează: semnul „=" defineşte două expresii propoziţionale echivalente; în acest caz, aceste expresii pot fi înlocuite una prin alta (condiţia lui Pascal a definiţiei). El mai poate fi şi semnul de identitate.

Semnul „≠" arată că două expresii propoziţionale nu pot fi în relaţie de definiţie, nici nu sînt echivalente, nici nu pot fi înlocuite una prin alta, şi nici nu sînt identice.

În cazul mincinosului, propoziţia p = „Eu mint" face ca oricare propoziţie q să aibă o valoare de adevăr inversă decît aceea atribuită ei. Avem astfel definiţia:

„Eu mint" $= \sim q$ Df

Această definiţie este generală. Avem astfel echivalenţa:

„Eu mint" $\equiv \sim q$.

Această echivalenţă este valabilă pentru orice ar reprezenta variabila q; pentru q = „Eu mint" obţinem contradicţia:

„Eu mint" $\equiv \sim$ „Eu mint"

„Eu mint" este echivalent cu „Eu nu mint".

Problema este: pentru ce în definiţia de mai sus şi în echivalenţa derivată din ea, q, care prin definiţie este arbitrar, nu poate deveni „Eu mint"? Pentru ce avem şi trebuie să avem $q \neq$ „Eu mint"?

Vom pleca de la următoarea tautologie, unde semnul „=" este întrebuinţat în sensul specificat mai sus:

$$\vdash : p = q \cdot \supset \cdot p \equiv q \qquad (1)$$

Aceasta este evidentă şi înseamnă: dacă propoziţiile p şi q sînt în relaţie de definiţie sau sînt identice, atunci ele sînt echivalente.

Propoziţia inversă nu este adevărată: dacă propoziţiile sînt echivalente, nu urmează că ele sînt în relaţie de definiţie (sau identice).

Formula (1) este o implicaţie şi nu o echivalenţă.

Prin transpoziţie obţinem:

$$\vdash : \sim (p \equiv q) \cdot \supset \cdot \sim (p = q)$$

Dar, deoarece $\sim (p = q)$ se poate scrie $p \neq q$, avem:

$$\vdash : \sim (p \equiv q) \cdot \supset \cdot p \neq q. \qquad (2)$$

În *PM* găsim teorema *5.18:

$$*5.18 \quad \vdash : p \equiv q \cdot \equiv \cdot \sim (p \equiv \sim q).$$

Sau prin transpoziţia negaţiei:

$$\vdash : \sim (p \equiv q) \cdot \equiv \cdot p \equiv \sim q.$$

Înlocuind în (2) primul membru $\sim (p \equiv q)$ prin $p \equiv \sim q$, conform regulii de înlocuire *(replacement)*, obţinem teorema pe care o numim T_ω:

$$T_\omega \quad \vdash : p \equiv \sim q \cdot \supset \cdot q \neq p.$$

În consecinţă, dacă avem definiţia

„Eu mint" $= \sim q$ Df.

avem și echivalența
„Eu mint" $\equiv \sim q$
care împreună cu teorema T_ω dă rezultatul
„Eu mint" $\neq q$
Într-o astfel de echivalență q nu poate fi „Eu mint".

Explicația este simplă și calculul a implicat cele două criterii, care nu trebuie confundate, ceea ce ar avea loc dacă q ar fi „Eu mint" (fiindcă ar rămîne numai criteriul mincinosului).

Observație. Vedem că propoziția: „Afirm p și p este fals" (1), care este o formă a antinomiei mincinosului, studiată de Russell în *Principia Mathematica* [16], este numai un caz particular al propoziției mai generale:

„Afirm p și p afirmă că q este fals" (2), q fiind o propoziție arbitrară. Putem să luăm imprudent $q = p$, și atunci propoziția generală (2) devine propoziția (1), pe care pare să o includă: „Afirm p și p afirmă că p este falsă". Dar propoziția (1) a fost exclusă prin calcul dintre toate propozițiile care pot fi reprezentate de propoziția (2). Prin urmare, propoziția (2) nu este o universală, din cauză că este o convenție. Angajamentul luat de mincinos, de a falsifica orice propoziție a cărei valoare de adevăr este dată, este o *convenție*, și orice convenție este o propoziție particulară, din cauză că nu poate fi derivată din axiomele sistemului (sau din teoremele lui), tocmai fiindcă este o convenție și nu un adevăr în universul sistemului.

VI. CONCLUZII

Am demonstrat teorema T_ω în cadrul logic din *PM*. Dar este ușor de văzut că ea este validă în orice sistem propozițional, care admite următoarele idei:

(1) *Variabile propoziționale* $p, q, r, \ldots$ care pot lua două valori, adevărul (A) sau falsul (F).

(2) *Definiția*, desemnată prin semnul „$=$", care poate fi și semnul de identitate; nondefiniția sau nonidentitatea, desemnată prin semnul „$\neq$".

(3) *Negația*, definită prin matricea:

p	$\sim p$
A	F
F	A

(4) *Echivalența* $p \equiv q$, definită prin matricea

$p; q$		$p \equiv q$
A	A	A
F	A	F
A	F	F
F	F	A

[16] Vol. I, p. 44 (ed. din 1910).

(5) *Implicaţia* $p \supset q$, definită prin matricea:

p; q		$p \supset q$
A	A	A
F	A	A
A	F	F
F	F	A

Orice sistem care admite aceste cinci idei admite de asemenea formula T_ω, care are totdeauna valoarea A (este o tautologie) în sistem.

$$T\omega \quad \vdash : p \equiv \sim q \cdot \supset \cdot p \neq q.$$

(semnul lui Frege $\vdash$ este semnul de aserţiune, deci nu este un semn logic, ca şi semnele de punctuaţie). Formula $T\omega$ exclude antinomia mincinosului.

Putem acum să enunţăm rezultatul final al analizei noastre:

A. *Un sistem formal necontradictoriu S, în care formula* $T\omega$ *nu apare explicit ca fiind validă (axiomă sau teoremă), acceptă implicit şi în mod eronat construcţia antinomiei mincinosului sau altele analoage.*

B. *Dacă pentru un sistem formal S formula* $T\omega$ *este falsă sau nedemonstrabilă sau inconsistentă cu axiomele, sistemul S este contradictoriu din cauză că admite implicit şi universal echivalenţa* $p \equiv \sim q$, *care conţine antinomia mincinosului, adică formula* $p \equiv \sim p$. *Pentru a o evita, va fi necesar să se introducă în sistem o axiomă nouă restrictivă sau o convenţie.*

Observaţie:

Am discutat antinomia mincinosului în forma ei clasică. Am citat în mod strict numai acele referinţe care ar fi putut să ajute pe cititor să vadă principalele formulări clasice ale antinomiei. De la publicarea operei *Principia Mathematica* (1910), s-au adăugat o mulţime de cercetări în acest domeniu şi paradoxul a luat o formă din ce în ce mai sofisticată, totuşi înrudită cu „mincinosul". Dar nu acesta era subiectul nostru. Vom remarca numai că, plecînd de la formula $T\omega$, validă în orice sistem bivalent (clasic), se poate obţine o nouă viziune şi pentru aceste probleme. Concluzia B de mai sus arată cum să se procedeze în fiecare caz.

International Logic Review, vol. XI, 22, Bologna, 1980.

Definiții și teoreme

I. CRIZA MATEMATICILOR

„Aproape că nu există doi matematicieni ale căror idei cu privire la fundamentele științei lor să fie complet de acord" [1], așa caracteriza Arend Heyting divergența pozițiilor în filosofia matematicilor. Și această afirmație este corectă. În mod paradoxal, cercetarea fundamentelor logice ale matematicilor, în loc să se asigure bazele lor, le-a slăbit și a transformat adevărurile lor în convenții arbitrare. Pe de altă parte, matematicile există în toată strălucirea lor, s-au dezvoltat și continuă să se dezvolte dincolo de ce se spune despre ele, fără să dea atenție la ceea ce Hilbert numește *„metamatematică"*.

Toate eforturile de a fundamenta, fie prin logică, fie prin filosofie, natura și bazele matematicilor, s-au lovit de dificultăți de netrecut și au creat probleme dificile, ba chiar insolubile. Exemple sînt paradoxele logico-matematice, problema indecidabilității *(Unentscheidbarkeit)* descoperită de Gödel, problema necontradicției unei teorii etc. Aceste fapte au adus matematicile într-o stare de criză, ceea ce s-a recunoscut deschis de către specialiști.

Pentru a preciza lucrurile, vom spune că,de fapt, nu este vorba de o criză a matematicilor, cît despre o criză a metamatematicii. Problemele paradoxale nu se nasc din dezvoltarea corpului de adevăruri matematice, ci numai din faptul că *vorbim despre* aceste adevăruri.

Unii autori cred că pot găsi și alte „crize" în istoria matematicilor. De exemplu, A. Fraenkel și J. Bar-Hillel insistă asupra ideii că secolul al XX-lea nu este prima perioadă în care matematicile au suferit o „criză a fundamentelor" [2]. După ei, trei mari crize au zguduit matematicile în cursul istoriei.

1. În secolul al V-lea î.e.n., în timpul cînd geometria se dezvolta ca o știință deductivă în mod riguros, au apărut două descoperiri paradoxale: (a) prima constată că două entități geometrice de aceeași natură nu sînt comensurabile; de exemplu, diagonala pătratului nu poate fi măsurată cu o parte alicotă a laturii lui; (b) cealaltă descoperire era aceea a Școlii eleate, discipolii acestei Școli, și în special Zenon, au construit o serie de paradoxe pentru a demonstra teza nonconstructibilității mărimilor finite cu părți infinit de mici. Această criză a provocat noi cercetări, și matematicienii greci au obținut

[1] Arend Heyting, *Mathematische Grundlagenforschungen. Intuitionismus, Beweistheorie*, p. 57 (Springer, Berlin, 1934).

[2] A. Fraenkel și J. Bar-Hillel, *Foundations of Set Theory*, p. 14 (North Holland Publishing Company, 1958).

ca rezultate două descoperiri excepționale: *Teoria proporțiilor*, așa cum apărea în cărțile 5 și 10 ale *Elementelor* lui Euclid; *Metoda exhaustivă*, inventată de Arhimede, care nu era astfel decît precursoarea riguroasă (fără a fi totuși o metodă generală) a teoriilor moderne de integrare.

2. Invenția calculului infinitezimal în secolele al XVII-lea și al XVIII-lea a condus la o nouă criză, care s-a definit într-un mod precis la începutul secolului al XIX-lea. Matematicienii au acceptat calculul diferențial și cel integral așa cum fuseseră edificate de autorii lui direcți, Leibniz și Newton, fără prea multe precauții logice, bazați mai ales pe intuiție. Utilizarea mărimilor variabile infinitezimale necesita o teorie riguroasă a limitelor, care însă nu exista. Această teorie a fost elaborată de Cauchy, după care Weierstrass a arătat că se poate „aritmetiza" analiza, iar apoi H. Poincaré a crezut că, în sfîrșit, s-a ajuns în matematici la „o rigoare absolută".

3. A treia criză a matematicilor s-a datorit teoriei mulțimilor, care a condus la contradicții și a pus în discuție însăși noțiunea de mulțime și, în consecință, pe aceea de număr (care e definită cu ajutorul noțiunii de mulțime).

Tentativele de a depăși această ultimă criză sînt multiple, dar nu le putem discuta mai de aproape aici. Vom atrage atenția numai asupra faptului că cele trei crize menționate sînt de natură diferită: pe cînd primele două au în centrul lor descoperiri matematice surprinzătoare, care au frapat spiritul contemporanilor prin caracterul lor insolit, ultima criză are un caracter particular, deoarece ea consistă dintr-o încercare de a reconstrui matematicile într-un limbaj nou, care să le asigure fundamentele. Cu alte cuvinte, crizele anterioare au fost depășite prin consolidarea rezultatelor noi și „bizare" *în interiorul matematicilor*; noua criză s-a ivit dintr-un *examen metamatematic* al rezultatelor extraordinare obținute în epoca noastră, prin încercarea de a se consolida matematicile *din afară*, printr-o reconstrucție artificială a limbajului lor (care nu este acela în care rezultatele au fost obținute). Se vede astfel că ultima criză a fost provocată de considerații metamatematice, și de aceea aceste științe nu au nimic să se teamă față de aceste speculații mai mult sau mai puțin filosofice și credem prea specific lingvistice.

După ceea ce a părut un veritabil dezastru al matematicilor, determinat de apariția acestei crize, gînditori de primă importanță au început să considere mai de-aproape ceea ce s-a întîmplat. Astfel s-au ridicat unele voci — este adevărat, într-un mod timid — care au pretins că matematicile nu au nevoie deloc de un „fundament". La acest punct de vedere s-a raliat o voce deosebit de autorizată, aceea a lui Hilary Putnam.[3] El nu crede: 1) că matematicile nu sînt clare; 2) că sînt într-o criză; 3) că au nevoie de „fundamente". Foarte dezbătutele probleme ale filosofiei matematicilor par să fie, pentru Putnam, fără excepție, probleme interne ale ideilor diverșilor constructori de sisteme. „Aceste sisteme — scrie el — sînt interesante, fără îndoială, ca exerciții intelectuale; dezbaterile provocate de aceste sisteme vor continua desigur, dar diferitele sisteme de filosofie matematică, fără excepție, nu trebuie să fie luate în serios."

Filosofia matematică, în încercarea ei de a reconstrui științele matematice în alți termeni decît în aceia în care au fost create, adică într-un lim-

[3] Hilary Putnam, *Mathematics without Foundations* („*The Journal of Philosophy*", LXIV, 1, p. 5–22, 1967).

baj artificial, s-a îndepărtat de obiectul matematic şi de procesul real matematic, creînd probleme care nici nu se pun pe terenul propriu al acestor ştiinţe. O observaţie de natura aceasta a fost făcută de eminentul gînditor Stephan Körner, fiindcă el scrie [4]: „Filosofia matematicilor, într-atît cît analizează structura gîndirii matematice, poate să intre în conflict cu matematicile, dar şi să piardă contactul cu subiectul ei sau să rămînă în urmă în raport cu dezvoltarea lor actuală".

Lăsînd de-o parte toate aceste probleme create de filosofia metamatematică, nu este mai puţin adevărat că există realmente lucruri esenţiale în matematici care au nevoie de o explicaţie mai aprofundată (alta decît încercarea de explicaţie metamatematică) privind în principal două probleme: obiectul matematic şi natura lui; mecanismul ratiocinativ real, prin care se progresează efectiv în aceste ştiinţe.

Problemele generale ale matematicilor, considerate în întregul lor, sînt reduse de A. Mostowski la următoarele două [5]:

A. Care este natura noţiunilor considerate în matematici? Pînă la ce punct ele sînt formate de om şi pînă la ce punct ele sînt impuse din afară şi de unde dobîndim cunoaşterea proprietăţilor lor?

B. Care este natura demonstraţiei matematice şi care sînt criteriile care ne permit să distingem demonstraţiile corecte de cele false?

Mostowski adaugă: „Aceste probleme sînt de natură filosofică şi nu putem spera să le rezolvăm în limitele exclusive ale matematicilor şi aplicînd numai metode matematice". (Este evident că aceste probleme au dat naştere la alte probleme particulare, cum sînt, de exemplu: problemele ridicate de metoda axiomatică, rolul ei în matematici şi limitele în care se poate aplica; curentul constructivist în matematici; axiomatizarea logicii; problema deciziei etc.). Totuşi, problemele cele mai generale ale matematicilor sînt cele citate mai sus: natura entităţilor matematice; natura şi rolul procesului ratiocinativ.

Fără să intrăm în analiza diverselor concepţii care au fost formulate în aceste două probleme, vom spune numai că examenul acestor multiple concepţii impune o concluzie surprinzătoare: nu ştim care este natura obiectului matematic şi nu ştim cu exactitate cum procedăm în aceste ştiinţe cînd obţinem rezultate extraordinare şi ineluctabile. S-ar părea astfel că Bertrand Russell avea perfectă dreptate cînd afirma că „matematicile sînt ştiinţele în care nu se ştie niciodată despre ce vorbim şi nici dacă ceea ce afirmăm este adevărat" [6].

În ceea ce urmează ne-am propus să urmărim procesul matematic natural, aşa cum se dezvoltă el efectiv în teoriile matematice, şi nu după ce l-am tradus în scheme formale, care se îndepărtează, prin forţa lucrurilor, de procesul natural. Analiza noastră nu va fi un examen spectral al teoriilor matematice, ci un examen direct al obiectului matematic şi al procesului deductiv, aşa cum apar în aceste ştiinţe.

[4] Stephan Körner, *On the Relevance of Post-Gödelian Mathematics to Philosophy* („*Problems in the Philosophy of Mathematics*", Amsterdam, 1967).

[5] Andrzej Mostowski, *The Present State of Investigation on the Foundations of Mathematics*, p. 3 (Polska Akademia Nauk — Instytut Matematyczny, 1955).

[6] Iată textul lui Russell: „*Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true*" („International Monthly", p. 84, 1901).

II. OBIECTUL MATEMATIC

Ca şi în alte probleme ştiinţifice, ceea ce a constituit dificultatea unor probleme matematice a fost faptul de a le ataşa tacit şi involuntar un punct de vedere filosofic care a introdus, implicit, fără a o şti, idei străine şi chiar inutile. Concepţii mai vechi sau mai noi, dezbătute de-a lungul timpului, au lăsat urme adînci în matematici sau în logică, impunînd matematicienilor, fără a fi conştienţi de aceasta, unele imagini sau o anumită terminologie deficientă. „Sînt convins — scrie Einstein în acest sens — că filosofii au avut o influenţă nocivă asupra progresului ştiinţific, transferînd unele concepte fundamentale din domeniul empiric, unde sînt sub controlul nostru, la înălţimile inaccesibile ale lui *a priori*. Fiindcă, deşi se pare că universul ideilor nu poate fi dedus din experienţă prin mijloace logice, ci este, într-un sens, o creaţie a intelectului uman fără de care nu e posibilă ştiinţa, totuşi acest univers al ideilor este tot atît de puţin independent de experienţele noastre pe cît sînt veşmintele noastre de forma corpului uman." [7]

Această observaţie rămîne adevărată şi în matematici. Să considerăm, de exemplu, un obiect matematic geometric, fie un triunghi. Este acesta un obiect dat, o „entitate" determinată, şi în caz afirmativ ce înseamnă existenţa lui? A pune problema în modul acesta, este a pune problema în mod eronat. Într-adevăr, chestiunea este, de fapt, aceea pusă de Porphyrius în *Isagoge*, şi ştim că ea a dat naştere la ampla dezbatere din Evul Mediu asupra naturii conceptelor generale: *„Prima est quaestio utrum genera ipsa et species vera sint, an in solis intellectibus inaniaque fingantur"* [8]. Această chestiune pusă cu privire la triunghi ia forma: triunghiul există în sine sau numai în intelectul nostru, are el o existenţă separată sau numai în lucrurile sensibile? Dar un lucru este sigur: fie că se dă un răspuns sau altul—sau chiar dacă nu putem da nici un răspuns — ştiinţele matematice îşi continuă progresul lor triumfal şi obţin rezultatele cele mai remarcabile. Ceea ce dovedeşte, într-un chip indiscutabil, că soluţia problemei puse de Porphyrius nu influenţează cu nimic dezvoltarea matematicilor, ba mai mult, că aceste ştiinţe sînt independente de o soluţie posibilă a acestei probleme.

Să examinăm mai de-aproape triunghiul. Să-l definim ca un poligon cu trei laturi. Este clar că nu am definit nici un obiect. Să legăm ideile noastre de experienţă, cum o indica Einstein, de data aceasta de experienţa cu obiecte matematice. Entitatea numită „triunghi" nu există ca atare. Orice triunghi are trei laturi, bine determinate ca mărimi. Triunghiul, ca gen scolastic, are trei laturi variabile, care pot lua, fiecare, o mărime determinată, dar în definiţia generală a triunghiului ele nu au nici o determinare a mărimii lor. Nu pot imagina triunghiul definit prin definiţia dată mai sus (poligon cu trei laturi), nu am o imagine, o figură determinată oferită de această definiţie. Atunci ce am prin această definiţie, ce reprezintă conceptul de triunghi în mod efectiv în procesul matematic?

Să considerăm problema degajată de orice punct de vedere filosofic (care, după cum am spus, nu intră în nici un fel în procesul matematic). Definiţia citată introduce trei variabile: laturile triunghiului. Fie aceste varia-

[7] Albert Einstein, *The Meaning of Relativity*, p. 2—3 (Ed. Methuen, Londra, 1922).
[8] Porphyrius, *Isagoge*, I, 3.

bile x, y, z. Definiția noastră se enunță în modul următor: „Un triunghi este un poligon cu trei laturi variabile x, y, z". Pe de altă parte, un poligon este definit ca o figură plană cu n laturi variabile. Să notăm deci entitatea matematică pe care o urmărim, triunghiul, cu T; să notăm poligonul cu n laturi P_n; pentru T singura determinare este numărul variabilelor, $n = 3$. Putem spune deci: T este P_n unde $n = 3$, adică cu trei laturi variabile x, y, z. Dar P_3 poartă numele de triunghi: $P_3 = T$. Aceasta arată că T este o funcție care depinde de x, y, z. Să scriem acest rezultat astfel:

$$T = P_3 (x, y, z). \qquad (1)$$

Pentru fiecare grupă de trei valori luate pentru variabilele x, y, z, avem în mod real un triunghi determinat. De exemplu, pentru valorile determinate $x = a_0$, $y = b_0$, $z = c_0$,

$$T = P_3 (a_0, b_0, c_0).$$

Prin urmare, entitatea T este o variabilă, anume o variabilă dependentă, adică o funcție. Funcția dată este P_3.

Să vedem acum diversele determinări pe care le poate lua această funcție. Să presupunem că lui x i se dă o valoare determinată, $x = a_0$. Funcția (1) devine:

$$T = P_3 (a_0, y, z).$$

Aceasta este tot o funcție, pentru că depinde de două variabile. Să o traducem: T reprezintă toate triunghiurile care au o aceeași latură dată și celelalte două (y și z) sînt variabile. Deci T este, și în acest caz, o variabilă-funcție și nu există o imagine geometrică reprezentativă a acestei entități matematice, *tocmai fiindcă ea este o variabilă*. Ce am făcut în fond? Am detașat din mulțimea tuturor triunghiurilor posibile, reprezentată de valorile funcției (1), submulțimea tuturor triunghiurilor reprezentată de $T = P_3 (a_0, y, z)$, de aceeași latură. În același mod, ne putem da mărimea celei de a doua laturi, $y = b_0$:

$$T = P_3 (a_0, b_0, z).$$

Și în acest caz nu avem un triunghi, ci o funcție ale cărei valori formează mulțimea tuturor triunghiurilor posibile care au două laturi date, a_0 și b_0.

În sfîrșit, dacă ne dăm toate laturile, obținem, într-adevăr un triunghi. Este cazul să observăm că chiar triunghiul ale cărui laturi sînt perfect determinate,

$$T = P_3 (a_0, b_0, c_0),$$

nu este un individ perfect determinat, ci valorile lui T reprezintă mulțimea tuturor triunghiurilor de laturi egale. Dacă vrem să determinăm unul dintre acești indivizi, va trebui să introducem un mod relativ de determinare, de exemplu, un sistem de axe de coordonate cartesiene. Laturile triunghiului vor deveni funcții de coordonatele vîrfurilor, cîte două de fiecare vîrf, și, cînd se vor da aceste variabile, individul triunghi va fi reprezentat în plan în mod complet determinat.

În general, putem lua laturile x, y, z, ca funcții de alte variabile, și să obținem clase (mulțimi de triunghiuri) după funcțiile alese pentru coordonate.

Pe scurt, entitatea numită în geometrie „triunghi" este o variabilă-funcţie, şi, din punct de vedere logico-matematic, valorile ei posibile (determinate chiar de definiţia ei generală sau particularizată) reprezintă o mulţime (clasă) de indivizi determinaţi, sau nedeterminaţi (variabili), după cum s-au dat toate determinările sau numai unele.

Dar cum o mulţime (sau clasă) nu poate fi de aceeaşi natură cu elementele care îi aparţin ca membri (paradoxul lui Russell exclude această posibilitate), rezultă că nici genul triunghi, nici speciile lui (obţinute prin determinări parţiale), pe care le putem defini la infinit într-un mod liber, nu sînt triunghiuri.

Clasa triunghiurilor echilaterale nu este ea însăşi un triunghi.

Prin urmare, definiţiile:

$$T = P_3(x, y, z),$$

sau $$T = P_3(a_0, y, z),$$

sau $$T = P_3(a_0, b_0, z),$$

sau $$T = P_3(x^2 + y^2, y, z) \text{ etc. etc.,}$$

nu reprezintă triunghiuri.

Definiţia generală a „triunghiului" nu reprezintă deci decît o variabilă, anume o funcţie de mai multe variabile. Cît timp în această definiţie rămîne un element variabil, definiţia nu reprezintă o entitate geometrică, ci o variabilă, ale cărei valori posibile, indicate de definiţie, formează o mulţime (clasă) de mulţimi. Şi se poate spune acelaşi lucru despre orice „obiect" matematic.

În general un „obiect" matematic K va fi definit de o funcţie ψ de mai multe variabile:

$$K = \psi(x, y, z, \ldots).$$

K nu reprezintă un obiect, ci o variabilă dependentă, o funcţie, ale cărei valori posibile constituiesc o mulţime sau clasă. Pentru toate valorile constante ale variabilelor se obţine un individ determinat (ca mărime, dar nu ca localizare):

$$K_0 = \psi_0(x_0, y_0, z_0, \ldots).$$

Dacă o singură dintre variabile nu este determinată, atunci rezultatul substituţiilor nu este un „obiect", ci o funcţie particularizată.

Putem dar conchide:

Un concept matematic este o variabilă, funcţie de alte variabile, care pot fi independente sau ele însele funcţii de alte variabile. În el însuşi, conceptul nu reprezintă schema generală a obiectelor sau „arhetipul" obiectelor care intră în joc (care ar exista în cerul lui Platon!) sau care ar fi esenţa comună a tuturor indivizilor, sau care ar exista numai în intelectul nostru, şi pe care intelectul l-ar forma prin extragerea caracterelor comune. *Definiţia unui concept matematic nu este altceva decît construcţia unei funcţii.* De aceea Wittgenstein, examinînd noţiunea de număr, a conchis că „numărul este o variabilă", sau textual: *„Der Zahlbegriff ist die variable Zahl"*.[9] Într-adevăr, oricare

[9] Ludwig Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus* (prop. 6.022) (Ed. Kegan Paul, Londra, 1933).

ar fi definiţia numărului, ea trebuie să fie generală, a oricărui număr natural posibil, deci ea trebuie să reprezinte o variabilă, care devine, de fiecare dată cînd se dau determinările fixate de definiţie, un număr dat. Dar o asemenea definiţie nu a fost încă găsită, tocmai fiindcă, după ceea ce am spus pînă acum, ea a fost căutată pe căi mai mult filosofice. Nu vrem să spunem că cercetările filosofice asupra matematicilor nu sînt legitime, ci dimpotrivă. Dar amestecînd explicaţiile filosofice în procesul matematic nu s-a ajuns să se explice nimic.

În matematici s-a impus, de la început, noţiunea de variabilă şi de funcţie şi această idee a făcut posibil imensul progres al acestor ştiinţe; noţiunile de variabilă şi de funcţie au fost introduse prin chiar natura caracterului general al definiţiilor, cu toate că matematicienii nu au avut o idee clară şi explicită de la începutul matematicilor. Dar chiar în realitatea familiară, conceptul este privit ca o funcţie, din punct de vedere logic, ca o funcţie propoziţională care-l defineşte. „O funcţie propoziţională — scrie Russell — este o expresie care conţine unul sau mai mulţi constituenţi nedeterminaţi, aşa că, dacă valorile lor sînt date, expresia devine o propoziţie [. . .]. Este un vas destinat să primească o semnificaţie, dar nu ceva avînd deja o semnificaţie." [10] Definiţiile generale sînt astfel de funcţii propoziţionale şi de aceea ele nu reprezintă ceva semnificativ, nici un obiect, nici arhetipul unei categorii de obiecte.

Rezultă din cele spuse că nu se pot defini decît genurile şi speciile prin funcţii propoziţionale, dacă apelăm la noţiuni ale logicii tradiţionale. Şi aici sîntem total de acord cu Goblot cînd scrie: *„on ne définit que des espèces"* [11].

Enunţul prin care un individ este determinat este o propoziţie (şi nu o funcţie propoziţională), care rezultă dintr-o funcţie prin înlocuirea tuturor variabilelor prin constante.

III. IMPORTANŢA DEFINIŢIILOR ÎN MATEMATICI

Am văzut că obiectul matematic este o funcţie care este introdusă prin definiţie.

Importanţa definiţiilor nu a scăpat matematicienilor şi logicienilor. Fără a intra în metafizica lui Aristotel, ci examinînd rolul pur logic al definiţiilor în demonstraţii, putem spune că definiţia este pentru marele Stagirit nervul motor al ştiinţei apodictice. Într-adevăr, el scrie textual: „O definiţie este sau un principiu sau o demonstraţie care diferă numai prin ordinea termenilor" [12]. O demonstraţie începe printr-o definiţie şi se sfîrşeşte printr-o definiţie, dar nu este numai atît; neidentitatea dintre definiţie şi demonstraţie este de altfel pusă în evidenţă de însuşi Aristotel. Iată ce scrie el [13]: „Moti-

[10] Bertrand Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy*, trad. franc., p. 188—189 (ed. Payot, Paris, 1926).

[11] É. Goblot, *Traité de logique*, p. 14 (A. Colin, ed. a VI-a, Paris, 1937).

[12] *Analiticele secunde*, I, 8, 75 b.

[13] *Op. cit.*, II, 3, 90 b.

vul diferenţei dintre demonstraţie şi definiţie este că a avea o cunoaştere a demonstraţiei este identic cu faptul de a poseda o demonstraţie; de aceea urmează că, dacă demonstraţia unei concluzii este posibilă, este evident că nu poate exista o definiţie pentru ea. Dacă ar fi altfel, am putea avea o concluzie de natura aceasta în virtutea definiţiei ei, fără demonstraţie; deoarece nimic nu ne împiedică de a avea una fără cealaltă. Este evident atunci că nu se poate defini tot ceea ce poate fi demonstrat." Dar Aristotel ne spune că, invers, nici tot ce poate fi definit poate fi şi demonstrat. Argumentarea lui este următoarea: „Principiile demonstraţiei sînt definiţiile şi s-a dovedit anterior că acestea [principiile] sînt nedemonstrabile; astfel sau principiile sînt demonstrabile, şi vor depinde atunci de principii anterioare şi regresul va merge la infinit; sau primele principii vor fi definiţii indemonstrabile" [14].

În rezumat, ştiinţa apodictică se bazează în întregime, la Aristotel, pe aceste două idei:

1. Definiţiile sînt principiile demonstraţiei şi sînt nedemonstrabile prin natura lor.
2. Demonstraţia şi definiţia nu sînt identice.

Această diferenţă dintre demonstraţie şi definiţie este explicată de Stagirit în modul următor: definiţia ne arată ce este un lucru, dar nu-l explică; explicaţia aparţine demonstraţiei.

Dacă vom considera acum mecanismul demonstrativ la Aristotel, vom vedea că problema cea mai importantă pentru construcţia unui silogism este termenul mediu. Acesta era privit de el ca fiind cauza determinantă a concluziei şi întreaga ştiinţă apodictică se bazează pe determinarea termenului mediu, determinare care este o definiţie. Definiţia este astfel expresia conceptului creator, a esenţei, şi prin ea ştiinţa apodictică îşi atinge scopul.[15]

Ştiinţa definiţiei este mult mai mult decît partea formală a silogismului; silogismul — este adevărat — este agentul definiţiei, căci cu ajutorul lui şi prin el se pot forma definiţii; dar funcţia silogismului, şi prin urmare a ştiinţei demonstrative, este, din punct de vedere ontologic, definiţia. Silogismul serveşte definiţia şi, pe de altă parte, definiţia este, în ultima analiză, punctul de plecare al silogismului.

Fără a putea face aici o istorie a problemei raportului dintre definiţie şi demonstraţie, vom mai menţiona concepţia lui Leibniz. Pentru autorul calculului infinitezimal, sarcina ştiinţei consistă din: 1) analiza conceptelor; 2) analiza adevărurilor. Conceptele sînt compuse din elemente simple, şi reducerea conceptului la elementele lui simple ne permite să-i construim o definiţie perfectă. Această teză este dezvoltată de Leibniz în *De arte combinatoria*. Dificultatea consistă, după el, în a găsi elementele simple din care se compune un concept. Pentru a răspunde la o observaţie făcută de Pascal [16], anume că „nu se poate demonstra nimic dacă trebuie să urcăm din principiu în principiu fără a găsi niciodată primul principiu" [17], Leibniz arată că în orice propoziţie adevărată predicatul trebuie să fie conţinut în subiect. În felul acesta, pentru a ne asigura de adevărul unei propoziţii, nu este necesar să descompunem complet subiectul şi predicatul, descompunere pe care Pascal

[14] *Op. cit.*, II, 3, 90 b.
[15] *Metafizica*, V, 1017 b, 22.
[16] În *De l'esprit géométrique*.
[17] Observaţia îi aparţine lui Aristotel.

nega că ar fi total posibilă; e de-ajuns să se constate că subiectul conține ca factor predicatul, ceea ce se poate face de la început (Leibniz făcuse o „aritmetizare" a conceptelor). Prin urmare, chiar dacă analiza conceptelor nu poate fi urmărită într-o manieră completă, demonstrația nu rămîne mai puțin posibilă și fructuoasă.[18]

Astfel, analiza se aplică noțiunilor și propozițiilor. Analiza conceptelor este definiția, analiza propozițiilor — sau a adevărurilor exprimate de ele — este demonstrația lor. De aceea Leibniz înlocuiește toate regulile lui Descartes prin una singură; „Să nu se admită nici un cuvînt fără definiție și nici o propoziție fără demonstrație" [19]. Dar demonstrația se reduce, în fond, la descoperirea incluziunii predicatului în subiect, deci la analiza termenilor, care se face printr-o definiție. Astfel, demonstrația se reduce, pînă la urmă, la analiza conceptelor, deci la definiție. De unde teza lui Leibniz: „Demonstrația este un lanț de definiții" — *demonstratio est catena definitionum*.

Această teză este aceeași cu a lui Thomas Hobbes (dacă se face abstracție de ideile filosofice adiacente, care nu schimbă cu nimic partea pur logico-formală a teoriilor lui Leibniz și Hobbes). Pentru autorul lui *Leviathan*, știința demonstrativă pleacă de la cîteva propoziții prime sau principii, dar aceste principii nu sînt altceva decît definiții, sau cum o spune el însuși: *Sunt primae autem nihil aliud praeter definitiones, vel definitiones partes, et hae solae principia demonstrationis sunt* [20].

Această idee va găsi continuatori, mai mult sau mai puțin fideli, dar care rămîn atașați ideii aristotelice, că nervul motor al oricărei demonstrații, și deci al întregii științe deductive, este definiția. Astfel, H. Poincaré va spune că „axiomele sînt definiții deghizate".

Credem însă că am arătat suficient importanța acordată de către unii gînditori foarte mari rolului definiției în științele deductive, pentru a mai fi necesar să mai insistăm.

IV. PLURALITATEA DEFINIȚIILOR

Se poate defini unul și același obiect prin mai multe definiții diferite. Această observație a fost făcută de unii logicieni, fără însă a-i da vreo semnificație, cu toate că este fundamentală pentru explicația mecanismului logico-matematic. În adevăr, Russell scrie: „Există totdeauna numeroase caracteristici care permit să se definească o clasă. Oamenii pot să fie definiți ca bipezi fără pene, sau ca animale dotate cu rațiune, sau, mai corect, prin trăsăturile prin care Swift a descris pe Yahaos" [21].

Logicianul Edmond Goblot a subliniat această posibilitate într-un mod foarte clar în al său *Traité de logique*: „Există multe definiții reale ale unuia și aceluiași concept, toate la fel de caracteristice, toate construite cu ajutorul

[18] Pentru dezvoltări asupra acestei probleme, la Leibniz, a se vedea *Istoria logicii*, ed. a II-a, Editura Didactică și Pedagogică, 1975, 46.1.6.

[19] *Ibidem*.

[20] Thomas Hobbes, *Computatio sive logica*, III, 9.

[21] Bertrand Russell, *Introduction to Mathematical Philosophy* (trad. fr.), p. 20.

unui gen și al unei diferențe. Există atîtea definiții cîte proprietăți reciproce are conceptul. Cercul poate fi definit: secțiunea unui cilindru sau a unui con, printr-un plan perpendicular pe axă, o elipsă a cărei excentricitate este nulă, sau locul geometric al punctelor de unde se vede o dreaptă dată sub un unghi dat; în general, orice loc geometric care este un cerc este o definiție a cercului." [22] Dar Goblot nu a dat nici o importanță faptului. El afirmă că toate aceste definiții ale unuia și aceluiași concept sînt logic dependente unele de altele; de exemplu, fiecare din definițiile cercului are un raport logic mai mult sau mai puțin direct cu toate celelalte proprietăți ale cercului, și acestea pot fi deduse, unele ca fiind consecințe, prin demonstrație, altele ca fiind condiții, prin analiză [23].

Lăsînd deoparte alte afirmații ale lui Goblot în legătură cu problema, care nu ne pot interesa aici, putem considera total surprinzător faptul că un logician de talia lui nu a observat că, dacă un același obiect poate fi definit în mai multe feluri, dintre care unele definiții sînt teoreme, nu toate propozițiile matematice intră în grupul propozițiilor definite. Într-adevăr, cînd Goblot afirmă că una din definițiile cercului este, de exemplu, „locul geometric al punctelor de unde se vede o dreaptă dată sub un unghi dat", el nu vede că această propoziție este o teoremă, adică o propoziție stabilită prin demonstrație. Constatarea noastră arată două lucruri: *că teoremele sînt definiții și că ele nu sînt de natură diferită de natura propozițiilor inițiale*, concluzie acceptată de Leibniz într-un mod general. Într-adevăr, în fruntea teoriilor el a pus definițiile, la care se reduc, în ultimă analiză, toate propozițiile primitive. Arta de a demonstra, adică de a obține propoziții adevărate, constă din două procedee: arta de a defini, care este analiza, și arta de a combina definițiile, care este sinteza. De unde teza lui Leibniz, deja citată, că *demonstrația nu este decît un lanț de definiții* [24].

V. MECANISMUL LOGICO-MATEMATIC

Teza lui Leibniz poate fi acum complet demonstrată. În adevăr, putem să ne dăm seama, prin considerațiile precedente, pentru ce este posibil, într-un mod teoretic, să avem mai multe definiții pentru același obiect. Am văzut că definiția este construcția unei funcții propoziționale de una sau mai multe variabile independente. Să reluăm exemplul dat, triunghiul: el are trei laturi. Dacă cele trei laturi sînt date, el poate fi construit. Definiția generală a variabilei „triunghi" (funcția respectivă) cu laturile x, y, z este:

$$T = P_3(x, y, z).$$

[22] É. Goblot, *Traité de logique*, p. 135.
[23] *Op. cit.*, p. 135.
[24] Leibniz revine mereu asupra acestei formule, pe care o explică după cum urmează: „Am crezut totdeauna că demonstrația nu este nimic altceva decît un lanț de definiții, sau în vederea unor definiții care rezultă din propoziții deja demonstrate sau admise cu certitudine. Analiza nu este altceva decît reducerea definitului la definiția sa, sau a propoziției la demonstrația ei." *(Ego semper putavi, demonstrationem nihil aliud esse quam catenam definitionum, vel, pro definitionibus, propositionum jam ante ex definitionibus demonstratarum aut certe asumptarum. Analysis autem nihil aliud est quam resolutio definiti in definitionem aut propositionis in suam demonstrationem.)*

Dacă introducem, prin definiție, noțiunea de unghi, atunci variabila T poate fi definită cu unghiul variabil $\hat{A}$ și două laturi variabile y și z:

$$T = P_3 (\hat{A}, y, z).$$

Sau încă, putem defini variabila T cu două unghiuri variabile $\hat{A}$ și $\hat{B}$ și o latură adiacentă z:

$$T = P_3 (\hat{A}, \hat{B}, z).$$

Avem posibilitatea să fixăm un individ dat T_0 prin unele din elementele sale în moduri numeroase. Dacă luăm aceste elemente ca variabile, ele vor fi elemente constituente ale funcțiilor definisante diverse ale variabilei T. Dar toate aceste funcții-definiții sînt echivalente, definind aceeași variabilă T. De exemplu, pentru definițiile „triunghiului", menționate mai sus, avem:

$$P_3 (x, y, z) = P_3 (\hat{A}, y, z) = P_3 (\hat{A}, \hat{B}, z) = \ldots$$

În general, fie un așa-zis concept matematic K; acesta nu este decît o variabilă, după cum am arătat. Se pot găsi pentru K elemente definisante variabile într-un mod aproape nelimitat. Toate aceste definiții vor fi echivalente, pentru că reprezintă același „concept" matematic. Prin urmare, putem avea pentru K o serie de definiții:

$$K = \psi_1 (x, y, z, \ldots),$$
$$K = \psi_2 (\alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$
$$K = \psi_3 (\mu, \nu, \xi, \ldots).$$
. . . .

Se obțin astfel diverse funcții propoziționale echivalente, fiindcă reprezintă aceeași entitate matematică:

$$\psi_1 (x, y, z, \ldots) = \psi_2 (\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = \psi_3 (\mu, \nu, \xi, \ldots) = \ldots$$

Fiind dată o definiție generală a unui „concept" matematic, $K = \psi (x, y, z, \ldots)$, dacă se acordă la una sau mai multe variabile o valoare constantă, sau o oarecare determinare, obținem o particularizare a lui K; această definiție se obține prin substituirea în definiția generală a valorii constante (sau a determinării date variabilei care o particularizează):

$$K' = \psi (a, y, z, \ldots),$$
$$K'' = \psi (x^2 + y^2, y, z, \ldots),$$
$$K''' = \psi [f(x), y, z, \ldots],$$
. . . .

Aceste funcții propoziționale reprezintă echivalențe parțiale în raport cu definiția generală $K = \psi (x, y, z, \ldots)$, fiindcă fiecare din K' K'', K''', ... nu este egal cu K, luat în totalitatea lui, și desigur la acest lucru se gîndea Leibniz cînd vorbea de echivalențe totale și echivalențe parțiale. În primul caz, al echivalențelor totale, definițiile unei aceleiași variabile matematice K sînt substituibile, fără nici o restricție, una alteia; în al doilea caz, al echivalențelor parțiale, substituția este valabilă de asemenea, dar restrînsă la particularitatea impusă prin definiția care conține această particularitate.

Constatăm astfel că avem două libertăți de a defini:

1) libertatea de a alege elementele definisante variabile;

2) libertatea de a impune acestor elemente definisante anume condiții arbitrare, ca, de exemplu, faptul ca o variabilă să fie în relație cu celelalte, $x^2 = y^2 + z^2$ etc.

În acest din urmă caz, definiția ne oferă o specie a „conceptului" K, și trebuie să ținem seama că o astfel de definiție este o particularizare a definiției generale. Echivalența subsistă chiar și în acest caz, dar numai în sfera acestei particularizări.

Se vede că mai ales această a doua libertate definisantă conține posibilitatea nelimitată de a imagina continuu alte condiții și prin urmare alte particularizări. În adevăr, în expresia definisantă

$$K = \psi(x, y, z, \ldots),$$

putem să alegem în mod liber variabile independente $(x, y, z, \ldots)$ și să le impunem, într-un mod liber, obligația de a fi funcții mai mult sau mai puțin complicate ale variabilelor deja date, sau ale altor variabile:

$$x = f(\alpha, \beta, \ldots),$$
$$y = g(\gamma, \delta, \ldots),$$
$$z = h(\mu, \nu, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

K devine astfel:

$$K = \psi[f(\alpha, \beta, \ldots), g(\gamma, \delta, \ldots), h(\mu, \nu, \ldots), \ldots].$$

În această libertate se găsește întreaga bogăție a invenției matematice. Și această libertate a fost sesizată de cei mai mari matematicieni. Cantor a spus că „esența matematicilor este libertatea lor". Și Kant menționa, în notele sale, această libertate pe care o are matematicianul în a defini: *„Der Mathematiker in seiner Definition sagt: sic volo, sic jubeo"* [25].

VI. CONCLUZII

Să rezumăm acum rezultatele obținute mai sus, pe care nu am putut, bineînțeles, decît să le schițăm, în spațiul restrîns al acestui articol.

1. O definiție este o funcție de una sau mai multe variabile și așa-numitul „obiect" matematic este o funcție introdusă liber prin definiție.

2. Această definiție este construită liber, prin alegerea liberă a unui caracter, sau unor combinații de caractere, atașate „obiectului" introdus ca „gen", caracter (sau combinații de caractere) capabil de a individualiza toate elementele (sau grupe de elemente) prin determinarea completă a caracterului sau caracterelor alese.

[25] *Kants gesammelte Schriften* (Band XVI, *Kants handschriftlicher Nachlass*, p. 579, Herausgegeben von der Königlichen preussischen Akademie der Wissenschaften, Berlin, Georg Reiner, 1912).

3. Această libertate nelimitată pe care o avem de a defini o entitate matematică se traduce prin pluralitatea definiţiilor unei aceleiaşi entităţi. Acelaşi „obiect" matematic poate fi definit prin definiţii diferite şi seria acestor definiţii poate fi privită ca nelimitată.

4. Demonstraţia nu face decît să stabilească echivalenţa acestor diverse definiţii ale unui aceluiaşi „obiect" matematic (variabil), sau a elementelor aceluiaşi „obiect", sau încă unele relaţii între elementele aceluiaşi obiect. Această echivalenţă este posibilă tocmai pentru că definiţiile aceluiaşi „obiect" (sau „obiecte") sînt echivalente. [26]

5. Toate teoremele sînt definiţii. Dacă am putea inventa de la început toate caracterele (sau grupele de caractere) definisante, teoremele ar putea fi enunţate ca definiţii, fără a mai avea nevoie de demonstraţie. Dar fiindcă validarea unui caracter sau a caracterelor definisante, ca atare, nu poate fi efectuată printr-un examen direct (dificultatea consistă mai ales în faptul că nu ne putem da seama, de la început, dacă da sau nu, caracterul ales poate fi individualizat pentru fiecare individ al genului caracterizat), atunci această validare se face pe cale de raţionament.

*

Credem că am putut răspunde, în ceea ce precedă, la cele două probleme pe care Mostowski le socotea ca problemele fundamentale ale matematicilor. Răspunsul nostru arată că problema logică, şi prin aceasta matematică, a obiectului matematic, nu este o problemă filosofică. Bineînţeles, nu contestăm legitimitatea de a pune astfel de probleme filosofice. Dar a pune problemele obiectului şi raţionamentului matematic, din punct de vedere filosofic, înseamnă a crea o problemă în plus şi teorii ca răspunsuri la această problemă, care nu sînt decît „epiteorii", epifenomen intelectual depărtat, mai mult sau mai puţin, de fenomenul intelectual matematic direct şi propriu-zis. Iar acesta, după cum ni se pare, a fost explicat suficient prin analiza noastră pur logică. Actul matematic are două aspecte: aspectul creator, prin care se introduce un nou „obiect", definiţia unei funcţii; aspectul demonstrativ, prin care se stabileşte echivalenţa unor astfel de funcţii în corpul unei teorii. Astfel se găsesc împreună cele două arte: *ars inveniendi* şi *ars demonstrandi*, ca două feţe ale aceluiaşi proces, care este procesul logico-matematic. [27]

Internationl Philosophical Quarterly 4, New York, 1981.

[26] Se înţelege de la sine că aceste echivalenţe pot fi totale sau parţiale cum observase deja Leibniz. În cazul echivalenţelor totale există o reciprocitate completă între definiţiile în joc şi se pot deduce unele din altele luînd pe oricare din ele ca propoziţii primitive. În cazul echivalenţelor parţiale, ordinea propoziţiilor definisante nu este indiferentă.

[27] Ne-am silit să rămînem, de-a lungul studiului nostru, pe terenul exclusiv al logicii. Dar natura obiectului ca şi a raţionamentului matematic, aşa cum le-am explicat mai sus, ar putea să arunce o lumină nouă asupra motivelor care au determinat pe Platon şi Aristotel să considere obiectele matematice ca avînd o situaţie specială. Într-adevăr, pentru Platon, obiectul matematic şi mai ales figurile geometrice formează un domeniu intermediar între idei şi lucrurile sensibile. (A se vedea, de exemplu, ***Republica***, VII, 529.) La fel, Aristotel contestă entităţilor matematice „autonomia" lor; ele ar fi datorate numai abstracţiei, fără a poseda o existenţă autonomă (*De anima*, I, 1 şi III, 7; *Metafizica*, K, 4, 1 061 b şi E, 1, 1 026 a etc.). Lumea larvară a variabilelor, creată în mod „liber" de matematician, nu putea fi identificată nici cu lumea ideilor transcendente a lui Platon, nici cu lumea esenţelor imanente a lui Aristotel.

Limitele sistemelor formale

I. PROBLEMA

Sistemele pur formale, destinate să înlocuiască teoriile matematice, prin eliminarea completă a intuiției din schema simbolică a teoriilor deductive, s-au izbit, încă de la început, de mari dificultăți. Una din aceste dificultăți este limitarea intrinsecă a acestor sisteme formale. Această limitare a fost demonstrată prima oară în 1931, de către Kurt Gödel, într-un articol devenit celebru. [1]

Gödel a demonstrat că, dacă avem un sistem formal *S* (care satisface unele condiții de care vom vorbi mai jos), este posibil să se construiască în interiorul lui, cu ajutorul semnelor acestui sistem, regulilor de inferență precum și al axiomelor, o expresie *W* care nu este nici demonstrabilă, nici nedemonstrabilă în cadrul sistemului. Raționamentul matematic este neputincios în raport cu unele expresii formulabile în sistem și există cel puțin o expresie *W*, corect formată în cadrul sistemului, față de care regulile de deducție sînt neputincioase.

Ideea că formalismul, în general, nu poate exprima absolut toate ideile logice a fost sesizată chiar de Russell, mult înaintea lui Gödel, la începutul cercetărilor sale. Într-adevăr, regula de substituție, de exemplu, care aparține oricărui sistem formal, nu este formalizabilă și astfel, de la început, tentativa de a exprima orice teorie matematică, exclusiv cu ajutorul simbolurilor și relațiilor dintre ele, s-a izbit de o imposibilitate de fapt, care, cu toate că putea să apară ca parțială și în oarecare măsură exterioară sistemului, afecta totuși chiar principiul de formalizare.

Credința după care simbolismul are o virtute creatoare și că el ajută efectiv procesul de deducție este exprimată de către Russell astfel: „Adoptarea regulilor simbolismului în procesul de deducție ajută intuiția în unele regiuni prea abstracte pentru imaginație [...] și astfel inteligența este condusă în cele din urmă să găsească șiruri de raționamente în regiuni ale gîndirii unde imaginația ar fi incapabilă să se susțină fără un ajutor simbolic. Limbajul obișnuit nu oferă un astfel de ajutor." [2]

[1] Kurt Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der „Principia Mathematica" und verwandter Systeme, I*, p. 173–199 („Monatshefte für Mathematic und Physik", vol. 38, 1931).

[2] A.N. Whitehead and B. Russell, *Principia Mathematica*, vol. I, p. 2 (Cambridge University Press, 1910).

Această idee a fost ridicată la rangul de principiu și sînt matematicieni care nu cred că ar fi posibil să se exprime ceva în mod exact și obiectiv în alt mod decît într-un limbaj formalizat.

Pentru Hilbert și școala lui, esența matematicilor este acest joc reglementat de simboluri, acestea nefiind un *ajutor* pentru memorie, ci definind un fel de spațiu abstract cu tot atîtea dimensiuni cîte grade de libertate există în operația concretă și imprevizibilă a combinației.[3] Dar demonstrația lui Gödel atacă această putere extraordinară a formalismului și subliniază un caracter vicios al esenței sale. Acest caracter precar al formalismului a fost sesizat, după cum am spus, de Russell, el însuși văzînd imposibilitatea de a formaliza principiul substituției: „Acest principiu (de substituție) — scrie Russell, în *Principia* — nu poate avea un tratament formal și indică un oarecare eșec al formalismului în general". De unde concluzia lui Brunschvicg, analizînd acest impas logic: „Logisticienii au contat pe punerea în formă simbolică a legilor logicii pentru a elimina orice urmă de intuiție și a parveni la sfera pură a conceptelor; se pare însă [...] că în simbol chiar rămîne totdeauna un oarecare reziduu de intuiție, și că trebuie să se depășească simbolismul pentru a depăși intuiția"[4].

Teorema de incompletitudine a lui Gödel a schimbat perspectivele formalizării și sensul ei și a condus la concluzii foarte grave. Iată, de exemplu, ce scrie A. Mostowski: „Teorema lui Gödel a avut o influență determinantă asupra concepției privind așa-zisele *sisteme logico-matematice formalizate*. Noi credem că în prezent aceste sisteme nu au decît o valoare istorică. Sub influența lucrărilor lui Hilbert și a școlii neopozitiviste, s-a imaginat în primele două decade ale acestui secol că problema cea mai importantă a fundamentelor matematicilor este de a construi un *limbaj* artificial cu reguli sintactice precise și că printre ele ar exista un limbaj universal, cel mai perfect, care ar putea fi identificat cu matematicile."[5] Și mai departe, cităm tot din Mostowski: „Am insistat asupra acestor lucruri pentru a accentua că tentativa de a stabili fundamentele matematicilor prin intermediul unui limbaj construit, *lipsit* de orice interpretare (sau al unui limbaj a cărui interpretare devine posibilă numai cînd este utilizat), este considerată astăzi ca un eșec complet"[6].

II. PARADOXUL LUI GÖDEL

Gödel a dat o demonstrație a acestei limitări interioare a formalismelor logico-matematice. El și-a propus să arate că speranța matematicienilor, de a exprima întreaga lor știință într-un mod formal, este iluzorie și că există în principalele sisteme formale (acela al lui Russell și acela al lui Zermelo-Fraenkel dezvoltat de von Neumann) sau în cele înrudite, probleme relativ simple care nu pot fi rezolvate. În acest scop, el aritmetizează în primul rînd

[3] J. Cavaillès, *Axiomatique et système formel*, p. 93 (Paris, Hermann, 1938).

[4] L. Brunschvicg, *Les Étapes de la philosophie mathématique*, p. 400 (Paris, Alcan, ediția a 3-a, 1929).

[5] A. Mostowski, *The Present State of Investigations on the Foundations of Mathematics*, p. 30 (Varșovia, Polska Academia Nauk, 1955).

[6] Mostowski, *op. cit.*, p. 31.

sistemul formal. Metoda aritmetizării constă, în principiu, din următoarele: se numerotează elementele primitive ale unui sistem formal, într-o oarecare ordine, dar bine determinată, dîndu-le un număr întreg (pozitiv) fiecăruia din ele; identificarea unui semn se face prin numărul de ordine pe care îl are. În loc să se vorbească de cutare semn al sistemului formal, se va vorbi de numărul respectiv cu care a fost notat semnul în ordinea aleasă. Expresiile formate cu semne vor deveni astfel șiruri de numere finite și demonstrațiile vor deveni operații cu șiruri de șiruri finite. În consecință aritmetizarea unui sistem formal semnifică asocierea într-un mod biunivoc a unor numere naturale (după o anumită regulă dată) cu obiectele sau elementele sistemului.

Se înțelege de la sine că demonstrația lui Gödel este interesantă numai pentru anumite sisteme formale; sistemul trebuie să fie necontradictoriu și destul de vast (prin axiomele sale) pentru a conține aritmetica. Pentru sisteme incomplete, prin construcția lor axiomatică parțială, demonstrația lui Gödel nu are sens.

Iată acum esențialul demonstrației lui Gödel.

Fie S un sistem formal de tipul *Principia Mathematica*. Gödel susține că se poate construi într-un mod corect în S o propoziție care afirmă propria sa indecidabilitate în sistem. Îndată ce s-a aritmetizat sistemul formal S, orice propoziție va fi reprezentată printr-un număr întreg la nivelul metamatematic al sistemului. Să construim acum enunțul metateoretic [7]:

(1) *Propoziția coordonată cu numărul „n" nu este derivabilă în S*, unde n este o variabilă.

Dar acest enunț, fiind formulat în S, care este aritmetizat, va fi, și el, coordonat cu un anumit număr r (bine determinat). Dacă în enunțul (1) dăm variabilei n valoarea r, obținem (punînd în evidență faptul că (1) are numărul r):

(2) *(Propoziția coordonată cu numărul „r" nu este derivabilă în S)*$_r$.

Propoziția r a fost construită în S și afirmă propria sa nederivabilitate în S. [8]

Această construcție a fost recunoscută ca fiind analoagă cu paradoxul megaric al mincinosului, analogie remarcată chiar de Hilbert. Într-adevăr, spune Hilbert, dacă cineva declară: „Propoziția pe care o pronunț acum nu poate fi rezultatul unei demonstrații", această propoziție conduce la un paradox ca și propoziția: „Eu mint" [9].

De altfel, această analogie cu paradodoxele logico-matematice a fost remarcată chiar de către Gödel (în studiul citat), care declară că construcția sa este analogă cu antinomia lui Richard.

Bazîndu-se pe această demonstrație, Gödel crede că poate enunța teorema următoare: „În orice clasă de formule necontradictorii, există propoziții indecidabile (unentscheidbare)".

[7] Dăm această primă formulare simplificată a paradoxului lui Gödel, după J. Ladrière, *Les Limitations internes des formalismes*, p. 94 (Louvain și Paris, 1957).

[8] Gödel a publicat cercetările sale în 1931, după cum am menționat, dar el nu a fost primul care a întrevăzut acest paradox. Înaintea lui, P. Finsler a pus deja problema în studiul său: *Formale Beweise. Entscheidbarkeit* („Mathematische Zeitschrift", vol. 25, 1926, p. 676–682).

[9] D. Hilbert și R. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. II, p. 676–682 (Berlin, Ed. Springer, 1939).

S-a conchis că orice formalism deductiv (în condițiile specificate mai sus) are frontierele sale și că deductibilitatea logică nu poate depăși anumite limite.

R. Carnap a generalizat aceste concluzii, ajungînd la concluzia că „orice aritmetică are lacune și matematica este un sistem incomplet" [10].

Teorema lui Gödel a fost enunțată într-un mod mai riguros în forma:

„Orice sistem logistic, destul de vast pentru a conține o formalizare a aritmeticii recursive, este inconsistent sau ω-inconsistent, sau altfel el conține o formulă indecidabilă" [11].

Rezultatul lui Gödel a fost reluat și demonstrat într-un alt mod, plecîndu-se de la alte ipoteze, cum au făcut-o Kleene [12] și Rosser [13].

Teorema lui Gödel a suferit unele extinderi, datorate unor probleme puse de către însăși această teoremă. S-au împărțit sistemele formale în două categorii: unele în care deducția presupune un număr finit de premise și care sînt numite „sisteme constructive"; altele în care deducția presupune o infinitate de premise, nereprezentabile *în mod recursiv*, și care se numesc „sisteme neconstructive" [14]. Însă teorema lui Gödel, așa cum a fost formulată de el însuși, nu poate fi demonstrată decît într-un sistem constructiv. Rosser a arătat că teorema lui Gödel poate fi extinsă de asemenea la sistemele neconstructive.

Turing [15] a elaborat, în mod analog „logici neconstructive", utilizînd reprezentarea ordinalelor transfinite, cu ajutorul λ-conversiunii a lui Church [16], care, la rîndul său, a demonstrat teorema lui Gödel.

În fine, Kleene [17] a demonstrat o generalizare a teoremei de limitare a lui Gödel.

Proprietățile metateoretice care conduc la teoreme de limitare sînt: în cazul lui Gödel — *saturația* sistemului formal; în cazul lui Church — *rezolubilitatea*.

Kleene a construit o teorie a predicatelor, cărora le-a dat o ierarhie stratificată cu ajutorul căreia el exprimă aceste proprietăți și ajunge la o teoremă de limitare generalizată.

[10] R. Carnap, *Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik* („Monatshefte für Mathematik und Physik", vol. 41, 1934).

[11] A. Fraenkel and J. Bar-Hillel, *Foundations of Set Theory*, p. 303 (*North-Holland* Publishing Company, 1958).

[12] S. C. Kleene, *General Recursive Functions of Natural Numbers* („Mathematische Annalen", vol. 112, 1936).

[13] J. B. Rosser, *Extensions of Some Theorems of Gödel and Church* („Journal of Symbolic Logic", vol. 2, 1937).

[14] J. B. Rosser, *Gödel Theorems for Non-Constructive Logics* („Journal of Symbolic Logic", vol. 2, 1937).

[15] A. M. Turing, *System of Logic Based on Ordinals* („Proceedings of London Mathematical Society", vol. 45, 1937).

[16] A. Church, *The Calculi of Lambda Conversion* („Annals of Mathematical Studies", Princeton, 1941).

[17] S. C. Kleene, *Recursive Predicates in the Theory of Constructive Ordinals* („American Journal of Mathematics", vol. 60, 1944).

Vom semnala de asemenea cercetările de natură semantică ale lui Carnap [18], Tarski [19], Mostowski [20].

Teoremele stabilite de Carnap și Tarski privesc ideea de adevăr și definiția sa într-un sistem formal. După aceste teoreme, nu se poate construi o definiție a propoziției adevărate într-un sistem *S*, în chiar sistemul *S*, ci într-un metalimbaj.

Mostowski a dat o formă mai generală teoremei lui Tarski.

Se vede de aici ce importanță au teoremele de limitare, care au dus la concluzii nu mai puțin extraordinare. Pentru a ne face o idee, vom cita concluzia lui J. Ladriére [21]:

„Dacă sistemul total este irealizabil, aceasta se datorește faptului că experiența matematică se desfășoară pe fondul unui orizont inepuizabil. Acest orizont, fiind condiția de posibilitate a experienței și a reprezentatului, nu poate fi gîndit decît ca o condiție de posibilitate. El nu poate fi deci reprezentat. Ceea ce aparține structurii constructivului, ca atare, nu poate fi atins într-o construcție, căci o condiție nu se poate presupune ea însăși. Dacă este adevărat că structura constructivului simbolizează pe aceea a temporalității, imposibilitatea sistemului total se întîlnește cu imposibilitatea reflexiunii (= gîndirii, A. D.) totale."

Vedem deci că incompletitudinea sistemelor formale, adică existența propozițiilor indecidabile în interiorul lor, revine la existența propozițiilor care au reflexie asupra lor înseși și astfel la problema paradoxelor logico-matematice. După cum am subliniat, Gödel, însuși a remarcat analogia paradoxului său cu acela al lui Richard, iar Hilbert a văzut în el o variantă a paradoxului mincinosului. Ideea că construcția lui Gödel nu este decît un nou paradox a fost susținută pentru prima oară de către Ch. Perelman. [22] Această idee a fost reluată, printr-o cale analoagă, de către M. Barzin [23].

III. CONSTRUCȚIA PARADOXULUI LUI GÖDEL

Logica simbolică utilizează simboluri pentru a nota noțiunile. Din punct de vedere formal (punctul de vedere metamatematic) este indiferent care sînt simbolurile primitive pe care le alegem pentru noțiunile logice. Gödel [24] ia ca semne primitive *(Grundzeichen)* numerele naturale, adică șirul:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

O formulă va fi deci un șir de numere naturale, iar o demonstrație *(Beweisfigur)* va fi un șir finit de șiruri finite de numere naturale. Matema-

[18] R. Carnap, *Logische Syntax der Sprache* (Springer, Wien, 1934).

[19] A. Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen* („Studia Philosophica", Leopoli, 1935).

[20] A. Mostowski, *A Stumbling Block in Constructive Mathematics* („Journal of Symbolic Logic", vol. 18, 1935).

[21] J. Ladrière, *op. cit.*, p. 443.

[22] Ch. Perelman, *L'Antinomie de M. Gödel* (Académie Royale de Belgique, „Bulletin de la Classe des Sciences", 5-ème série, vol. 22, 1936, p. 730–736).

[23] M. Barzin, *Sur la portée du théorème de M. Gödel* (Académie Royale de Belgique, „Bulletin de la Classe des Sciences", 5-ème série, vol. 26, 1940, p. 230–239).

[24] Expunerea care urmează este aceea făcută de Gödel în prima parte a articolului citat (1931).

ticile vor fi exprimate în acest fel. *Metamatematica*, știința care vorbește de propoziții matematice, va consta din concepte și propoziții care se referă la concepte și propoziții matematice și care ca și acestea din urmă sînt exprimate prin șiruri finite de numere naturale; urmează că propozițiile și conceptele matematice vor fi concepte și propoziții asupra numerelor naturale (sau șiruri finite de numere naturale).

În rezumat, Gödel numerotează fiecare noțiune primitivă printr-un număr întreg pozitiv. În loc să spună „noțiunea (sau propoziția) reprezentată prin cutare semn simbolic", el spune „noțiunea (sau propoziția) care are cutare număr".

Prin această corespondență Gödel a creat un sistem izomorf cu *Principia Mathematica*, în domeniul numerelor naturale.

Să considerăm acum clasele claselor (ele definesc, cum se știe, numerele naturale). Fiecare clasă va avea un semn determinat care va fi numit un semn de clasă *(Klassenzeichen)*. Semnele claselor vor fi aranjate într-o ordine oarecare, fie ordinea lexicografică, fie după suma membrilor etc. Fie R simbolul care reprezintă ordinea aleasă, adică relația ordonatoare a semnelor claselor. Putem acum să numerotăm aceste semne ale claselor; primul, al doilea, al treilea, ..., al n-lea. În consecință, dacă ni se dă ordinea R în care am ordonat semnele claselor, vom ști imediat ce număr are fiecare semn de clasă. Vom nota

$$R(n)$$

acest semn, care va semnifica: în ordinea R, semnul de clasă care are numărul n.

O clasă este definită în *Principia Mathematica* prin $\hat{x}$ (fx), f(x) fiind funcția definisantă. Variabila liberă este x și trebuie remarcat că în definiția unei clase nu există decît o variabilă liberă.

Dacă variabila x ia valori de clasă, atunci $\hat{x}$(fx) este o clasă a claselor; avem de asemenea o singură variabilă liberă. Fie α un semn de clasă oarecare; se va nota prin

$$[\alpha;\ n]$$

formula care este obținută din semnul clasei cînd se înlocuiește variabila liberă prin semnul numărului natural n.

Să definim acum o clasă K de numere naturale după cum urmează:

$$n \in K \equiv \overline{Bew}\,[R(n);\ n] \qquad (1)$$

(s-a prescurtat cuvîntul german *beweisbar* — demonstrabil — și bara este semnul negației).

Definiția noastră spune că un număr natural n aparține clasei K, dacă pentru el nu este demonstrabilă formula $[R(n);\ n]$.

Rezultă, în raport cu aceste definiții, că există un număr de clasă S astfel încît formula $[S;\ n]$ înseamnă că numărul natural n aparține lui K. Dar cum S este un număr de clasă, urmează că el are un număr de ordine q și că S este identic — după definiția semnului de clasă — cu $R(q)$:

$$S = R(q).$$

Gödel arată că propoziţia

$$[R(q)\,;\,q]$$

este indeterminabilă în sistemul lui Russell. Într-adevăr, dacă propoziţia $[R(q)\,;\,q]$ ar fi demonstrabilă, atunci ea ar fi adevărată, deci q ar aparţine lui K; dar am avea după (1):

$$q \in K \equiv \overline{Bew}\ [R(q)\,;\,q],$$

adică propoziţia $[R(q)\,;\,q]$ ar fi indemonstrabilă, în contradicţie cu ipoteza Dacă $[R(q)\,;\,q]$ ar fi falsă, atunci negaţia ar fi valabilă, deci q nu ar aparţine lui K, adică propoziţia $q \in K$ ar fi falsă:

$$\overline{q \in K} \equiv Bew\ [R(q)\,;\,q]$$

Ca urmare, $[R(q)\,;\,q]$ este demonstrabilă în acelaşi timp cu negaţia sa, ceea ce este contradictoriu.

IV. PARADOXUL LUI RICHARD

Jules Richard [25] a publicat în 1905 un paradox prin care înţelegea să arate că nu este nevoie să mergem pînă la teoria numerelor ordinale pentru a cădea asupra unei astfel de contradicţii. Întrucît Gödel el însuşi a recunoscut analogia construcţiei sale cu paradoxul lui Richard, după cum am menţionat, vom prezenta acest paradox în cele ce urmează.

Să considerăm alfabetul francez care conţine douăzeci şi şase de litere; să scriem toate aranjamentele două cîte două, pe care le putem face cu aceste douăzeci şi şase de litere, şi după aceea să le aranjăm în ordinea lor alfabetică; să mai formăm încă toate aranjamentele de trei litere şi să le scriem de asemenea în ordinea lor alfabetică; după aceea, să mai formăm încă aranjamentele de patru litere etc. Aceste aranjamente pot să conţină aceeaşi literă repetată de mai multe ori, adică avem aranjamente cu repetiţie. Pentru orice număr întreg p, va corespunde un aranjament de p litere, care se va găsi în acest tabel şi cum tot ce se poate scrie este un aranjament de litere, tot ce se poate scrie se va găsi în acest tabel, al cărui mod de formare a fost indicat. Definiţia unui număr fiind făcută cu cuvinte şi acestea fiind compuse din litere, urmează că unele din aceste aranjamente vor fi definiţii de numere. Să ştergem din aceste aranjamente, aranjamentele care nu sînt definiţii de numere. Fie U_1 primul număr definit de un aranjament, U_2 al doilea, U_3 al treilea etc. Am aranjat astfel într-o ordine determinată, toate numerele definite cu un număr finit de cuvinte. Deci toate numerele pe care le putem defini cu un număr finit de cuvinte formează o mulţime *numerabilă*, pe care o vom nota cu E.

Iată acum unde este contradicţia. Se poate forma un număr care nu aparţine acestei mulţimi.

[25] J. Richard, *Les Principes des mathématiques et le problème des ensembles* („Revue générale des Sciences pures et appliquées", vol. 16, 1905).

Fie „p a n-a zecimală din al n-lea număr al mulțimii E; să formăm un număr care să aibă zero pentru partea întreagă și pentru a n-a zecimală $p + 1$, dacă p nu este egal nici cu 8, nici cu 9, și unitatea, în cazul contrar". Acest număr, N, nu aparține mulțimii E. Dacă ar fi al n-lea număr al mulțimii E, a n-a sa cifră ar fi a n-a cifră zecimală a acestui număr, ceea ce nu este.

Să notăm cu G grupul de litere dintre ghilimele. Numărul N este definit prin cuvintele grupului G, adică printr-un număr finit de cuvinte; ar trebui deci să aparțină mulțimii E. Dar s-a văzut că nu aparține. Aceasta este contradicția.

Am reprodus aproape textual expunerea acestui paradox, așa cum a fost el formulat chiar de Richard.

Paradoxul lui Richard a fost prezentat sub o formă simplificată de către Carnap [26]. Fie *Zpr (Zahlpredikat)* un predicat prin care reprezentăm numerele reale, adică al cărui argument ia ca valoare o expresie numerică. Putem atașa fiecărui predicat *Zpr* un număr natural, de exemplu, considerînd ordinea lexicografică a propozițiilor definisante sau într-un alt mod. Fie a o expresie a unui număr; acest număr va fi numit *richardian*, dacă numărul a este numărul unui predicat *Zpr*, de exemplu P_a, astfel că $P(a)$ este fals. (Cu alte cuvinte, dacă predicatul cu indicele numeric a nu convine indicelui a). Cu aceste indicații *richardian* este un predicat *Zpr* bine definit și are în consecință și el un număr de ordine, fie b. Acest număr b trebuie să fie la rîndul său sau *richardian* sau *non-richardian, tertium non datur*. Dacă b este richardian, atunci el nu admite, după definiție, proprietatea cu numărul b, care este *richardian*, deci b nu este *richardian*; dacă b nu este *richardian*, atunci el admite proprietatea cu numărul b, care este *richardian*, deci el este *richardian*.

Să exprimăm, cu Carnap, această contradicție în simboluri.

Fie o limbă logică S în care utilizăm un functor *num* prin care putem reprezenta o numerotare univocă a tuturor predicatelor *Zpr* ale limbii S. De exemplu, dacă P este un *Zpr* (predicat de număr), atunci *num* P este o expresie a unui număr.

Univocitatea acestei enumerări este presupusă:

$$[num\ (F) = num\ (G)] \supset (x)\ [F(x) \equiv G(x)] \tag{1}$$

Să definim acum predicatul *richardian* = *Ri*:

$$Ri(x) \equiv (F)\ [(num\ \ (F) = x) \supset \sim F(x)] \tag{2}$$

Dar fiindcă *Ri* este un *Zpr*, el are de asemenea un număr, pe care-l vom desemna prin *num* (*Ri*). Să presupunem acum că numărul predicatului *Ri* este el însuși *richardian*: *Ri*[*num* (*Ri*)]. Rezultă în acest caz, după formula (2), că dacă vom înlocui x cu *num* (*Ri*) și F cu *Ri*, obținem:

$$\sim Ri\ [num\ \ (Ri)].$$

Presupunerea noastră că *num* (*Ri*) este *richardian*, conducînd la o contradicție, că el nu este *richardian*, trebuie să fie declarată falsă, deci:

$$\sim Ri\ [num\ \ (Ri)]. \tag{3}$$

[26] R. Carnap, *Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik*, loc. cit.

Din (1):

$$[num\ (F) = num\ (Ri)] \supset [\sim F[num\ (Ri)] \equiv \sim Ri\ [num\ (Ri)]] \quad (4)$$

Din (3) și (4)

$$[num\ (F) = num\ (Ri)] \supset \sim F[num\ (Ri)] \quad (5)$$

Din (2)

$$(F)\ [num\ (F) = num\ (Ri)] \supset \sim F\ [num\ (Ri)] \supset Ri\ [num\ (Ri)] \quad (6)$$

Din (5) și (6)

$$Ri\ [num\ (Ri)] \quad (7)$$

Propozițiile (3) și (7), amîndouă demonstrate, sînt contradictorii.

Vom observa că demonstrația lui Carnap este foarte lungă și că putem reduce acest paradox la paradoxul lui Russell format cu predicatele *predicabil* și *impredicabil*. Într-adevăr, să presupunem că scriem toate predicatele numerelor reale intr-o ordine oarecare, fie, de exemplu, ordinea lexicografică. La fiecare predicat va fi atașat un indice numeric:

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_n.$$

La fiecare predicat de număr corespunde un număr natural și numai unul singur, care este indicele său; corespondența este univocă. Fiecare indice poate admite ca predicat predicatul pe care el il numerotează sau nu, *tertium non datur*. Dacă indicele x al unui predicat P_x nu admite predicatul P_x, atunci x va fi numit *richardian*; dacă x admite proprietatea numărului P_x, atunci el nu va fi *richardian*. Orice număr natural care este indicele unuia din predicatele de numere este deci sau *richardian* sau *nonrichardian*, a treia posibilitate nu există. Dar predicatul *richardian* este el însuși un predicat de număr și in consecință el se așază printre predicate la un rang determinat b, adică el este Ri_b

Avem deci definiția:

$$Ri_b\ (x) = \sim\ P_x\ (x). \qquad \text{Df} \quad (1)$$

De unde echivalența generală (pentru orice valori ale simbolurilor):

$$Ri_b\ (x) \equiv \sim\ P_x\ (x) \quad (2)$$

Pentru valoarea particulară a lui x, anume $x = b$, predicatul $P_x = P_b = Ri_b$ și obținem:

$$Ri_b\ (b) \equiv \sim\ Ri_b\ (b)$$

Propoziția „b este *richardian*" este echivalentă cu popoziția „b nu este *richardian*".

Observație

Paradoxul lui Richard a fost expus și în alte moduri. De exemplu, iată forma sub care il găsim expus de Haskel B. Curry [27].

[27] Haskel B. Curry, *Foundations of Mathematical Logic*, p. 6 (New York, Graw-Hill, 1963).

Argumentarea lui Richard este utilizată ca atare pentru a demonstra că mulțimea tuturor funcțiilor numerice nu este numerabilă.

Să presupunem că avem o „numerare": fie $f_m(n)$ valoarea funcției a m-a în această enumerare, pentru valoarea n a argumentului. Să formăm funcția g, astfel ca pentru orice n să avem:

$$g(n) = f_n(n) + 1.$$

Fie p indicele funcției g în enumerare; în acest caz avem:

$$g(n) = f_p(n).$$

Deci:

$$f_p(p) = g(p) = f_p(p) + 1.$$

Această egalitate este o contradicție. De unde rezultă că funcțiile numerice nu sînt numerabile.

Să presupunem că acum considerăm nu mulțimea tuturor funcțiilor numerice, ci mulțimea tuturor funcțiilor numerice definisabile. Prin *definisabil* înțelegem *definisabil* într-un limbaj dat, de exemplu limbajul (matematic) român, cu un dicționar și o gramatică fixate. Pentru că numărul cuvintelor limbajului este finit, numărul expresiilor pe care le putem forma în acest limbaj formează o mulțime nenumerabilă și, în consecință, expresiile care constituie definiții de funcții numerice, și deci funcțiile definisabile de ele însele trebuie să formeze o clasă numerabilă. Dar am văzut că într-o astfel de enumerare putem construi funcția $g(n) = f_n(n) + 1$, $g(n)$ avînd ca indice un număr p perfect determinat. Deci: $g(n) = f_p(n)$. Pentru valoarea p dată lui n ajungem la contradicția semnalată mai sus, ceea ce este tocmai paradoxul lui Richard.

V. PARADOXUL IZOMORF-HETEROMORF

Pentru a arăta mecanismul logic veritabil al paradoxelor, vom construi un paradox mai general decît acela al lui Richard, dar care de data aceasta va fi nu numai analog paradoxului lui Gödel (ca cel al lui Richard), dar va fi o formă a acestui paradox.

Să considerăm primele n numere naturale.

În mod normal ele sînt scrise în ordinea mărimii lor:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, n.$$

(Vom opri șirul la numărul determinat n, necesar în problema care va urma.)

Să considerăm de asemenea numele lor într-o limbă dată, de exemplu, în românește: unu, doi, trei, patru, ...

Să aranjăm acum aceste numere, nu în ordinea mărimii lor, ci în ordinea lexicografică dată de numele lor în limba considerată (sau altfel, prin per-

mutări determinate în primul şir, ceea ce este totdeauna realizabil, întrucît şirul este finit). Vom nota numerele în această ultimă ordine, astfel:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n.$$

Avem acelaşi şir de numere naturale, dar rangul fiecărui număr nu mai este egal cu valoarea numărului acestui rang, $a_n \neq n$.

Să considerăm tot astfel predicatele numerelor reale; le vom aranja la fel într-o ordine oarecare, de exemplu ordinea lexicografică, adică în ordinea unde ele se găsesc în dicţionarul limbii alese: $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$. Fiecărui predicat al numărului unui rang dat P_x, îi va corespunde un număr şi numai un singur a_x din şirul lexicografic al numerelor, care are acelaşi rang; corespondenţa este biunivocă. Predicatului dat P_x îi corespunde un număr a_x şi numai unul şi avem $a_x \neq x$. (Putem întotdeauna să facem $a_x \neq x$, prin alegerea convenabilă a ordinii).

Ne vom pune acum problema: dîndu-se un predicat determinat P_x din primul şir, numărul corespunzător din al doilea şir, a_x, cu acelaşi rang, are el acest predicat sau nu? Răspunsul este o tautologie: numărul a_x are predicatul de numere P_x sau nu-l are, *tertium non datur*. Dacă a_x admite ca predicat predicatul de acelaşi rang P_x, vom spune că a_x este *izomorf*; în caz contrar, vom spune că este *heteromorf*. În virtutea acestor definiţii, orice număr a_x, care corespunde unui predicat determinat P_x, este sau *izomorf* sau *heteromorf*, a treia posibilitate nu există. De exemplu, dacă predicatul de număr *prim* ar avea ca indice 104 (P_{104}= prim) şi numărul corespunzător ar fi a_{104}= 504, numărul 504, nefiind prim, va fi *heteromorf*; dacă am avea predicatul P_{71} = *pătrat perfect* şi numărul corespunzător $a_{71} = 625$, cum $625 = 25^2$, numărul $a_{71} = 625$ ar fi *izomorf* etc.

Predicatele *izomorf* şi *heteromorf* sînt ele însele predicate de numere şi în consecinţă ele se găsesc în ranguri bine determinate în seria lexicografică de predicate. Să ne fixăm atenţia asupra predicatului *heteromorf* pe care îl vom nota *Het* : el va avea un rang determinat h, căruia îi va corespunde un număr perfect determinat $a_h \neq h$ situat în acest rang prin numele său lexicografic:

$$P_1,\ P_2,\ P_3, \ldots, Het_h, \ldots, P_n.$$
$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_h, \ldots, a_n.$$

Conform definiţiilor noastre, numărul a_h este *izomorf* sau *heteromorf tertium non datur*. Dacă numărul a_h este *izomorf*, atunci el admite ca predicat predicatul de acelaşi rang Het_h = *heteromorf*, deci el este *heteromorf*; dacă a_h este *heteromorf*, atunci el are tocmai predicatul de acelaşi rang Het_h = *heteromorf*, deci el este *izomorf*. Paradoxul este flagrant.

Ceea ce este interesant în acest caz este faptul că numărul a_h nu este rangul predicatului Het_h: oricare ar fi el, numărul a_h nu poate fi nici *izomorf*, nici *heteromorf*. Nu se aplică o proprietate de rang h chiar numărului h însuşi, ci unui număr complet diferit de h, $a_h \neq h$.

Paradoxul lui Richard, aşa cum a fost prezentat de Carnap, este un caz particular al acestui paradox. Am văzut deja că paradoxul lui Richard poate fi obţinut mult mai simplu decît în articolul citat al lui Carnap. Considerăm

toate predicatele de numere reale și să le scriem ca mai sus, într-un șir oarecare, fie șirul lexicografic; să scriem de asemenea seria indicilor lor:

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_n.$$

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

Corespondența dintre un predicat dat de această serie P_x și numărul corespunzător din al doilea șir (de același rang) este univocă. Dacă un număr întreg x, care este indicele unui predicat dat P_x din acest șir, nu are proprietatea exprimată de acest predicat, el va avea proprietatea de a fi *richardian*; dacă x are proprietatea P_x, el nu va fi *richardian*. Dar *richardian* este un predicat de număr, el însuși, și deci el se va găsi în șirul de predicate cu un rang determinat h, deci $richardian_h = Ri_h$.

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ Ri_h, \ldots,\ P_n.$$

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ h,\ \ldots,\ n\ .$$

Problema devine acum: numărul h este *richardian* sau el nu este *richardian*? Dacă h este *richardian*, atunci el nu admite proprietatea numerotată h, anume $Ri_h = richardian$, deci h nu este *richardian*; dacă h nu este *richardian*, atunci el admite proprietatea numerotată h, anume $Ri_h = richardian$, deci h este *richardian*. Se vede astfel că paradoxul lui Richard, așa cum el a fost formulat mai sus, nu este decît un caz particular al paradoxului *izomorf-heteromorf*, cînd facem $a_x = x$, adică cînd ordonăm șirul de numere naturale în ordinea mărimii lor.

În simboluri, paradoxul se scrie după cum urmează. Definiția paradoxului *izomorf-heteromorf* este:

$$Het_h\,(a_x) = \sim P_x\ (a_x) \qquad \text{Def.}$$

numărul notat lexicografic cu a_x este *heteromorf*, dacă el nu admite proprietatea cu indicele x, anume P_x. De unde echivalența generală:

$$Het_h\,(a_x) \equiv \sim P_x\,(a_x). \qquad (1)$$

Pentru valoarea particulară $x = h$, cînd $P_h = Het_h = heteromorf$, avem paradoxul:

$$Het_h\,(a_h) \equiv \sim Het_h\ (a_h) \qquad (2)$$

Paradoxul lui Richard, în forma lui simplificată pe care i-am dat-o, este un caz particular al acestui paradox pentru $a_x = x$. (Șirul indicilor a fost ordonat în ordinea mărimii lor.) Să facem în definiția precedentă și în echivalența (1) $a_x = x$, cînd $Het_h = Ri_h$:

$$Ri_h\,(x) = \sim P_x\,(x) \qquad \text{Def.}$$

$$Ri_h\,(x) \equiv \sim P_x\,(x)$$

Pentru $x = h$ avem $P_h = Het_h = richardian = Ri_h$:

$$Ri_h\,(h) \equiv \sim Ri_h\,(h)$$

Propoziția „*h* este *richardian*" este echivalentă cu propoziția „*h* nu este *richardian*", ceea ce este contradictoriu.

VI. FORMULA $T\omega$

Paradoxul *izomorf-heteromorf* este consecința unei definiții de tipul următor

$$P(x) = \sim \varphi(x), \qquad \text{Def.}$$

de unde rezultă echivalența generală:

$$P(x) \equiv \sim \varphi(x)$$

Această echivalență este valabilă pentru orice x. Este ea de asemenea valabilă pentru orice φ? Vedem mai întîi că nu putem spune că această definiție rămîne totdeauna valabilă oricare ar fi φ (variabil), căci atunci putem spune prin definiție pentru $\varphi = P$:

$$P(x) = \sim P(x) \qquad \text{Def.}$$

ceea ce este contradictoriu: „Dacă x nu are predicatul P, atunci x are predicatul P". În consecință, într-o definiție avînd forma precedentă — ca și în echivalența respectivă — variabila φ nu poate lua valoarea P, adică $\varphi \neq P$. Putem spune același lucru dacă scriem această definiție în *extensiune*, ca și echivalența

$$x \in \hat{z}(Pz) = \sim x \in \hat{z}(\varphi z) \qquad \text{Def.}$$

$$x \in \hat{z}(Pz) \equiv \sim x \in \hat{z}(\varphi z)$$

Aici de asemenea $\varphi \neq P$, căci altfel am spune prin definiție: „Dacă x aparține clasei determinate prin funcția $P(x)$, x nu aparține clasei determinate prin funcția $P(x)$."

În consecință, problema paradoxelor, bazate pe o definiție de tipul dat mai sus și pe echivalența respectivă, este: cum și bazîndu-ne pe ce principiu logic putem împiedica simbolul variabil φ, în astfel de definiții, să ia valoarea P?

Vom aminti în acest sens că în orice tratat de logică tradițională există unele reguli care reglementează construirea definițiilor. Printre aceste reguli vom cita următoarea regulă:

O definiție nu trebuie să conțină contradicții, și anume nici o contradicție in terminis, nici o contradicție in adjecto, căci în acest caz nu se definește nimic.

Dacă ne dăm deci definiția

$$P(x) = \sim \varphi(x) \qquad \text{Def.}$$

variabila φ (simbol predicativ) nu poate niciodată să aibă valoarea $\varphi = P$, pentru a exclude definiția contradictorie $P(x) = \sim P(x)$. Condiția aceasta rămîne valabilă de asemenea în echivalența generală care rezultă:

$$P(x) \equiv \sim \varphi(x)$$

Aici de asemenea $\varphi \neq P$ (din cauza condiției definiției care a dat loc la această echivalență).

Astfel, deci, această echivalență implică relația $\varphi \neq P$ și am obținut o tautologie, pe care o vom nota $T\omega$:

$$T\omega \quad P(x) \equiv \sim \varphi(x) \cdot \supset \cdot \varphi \neq P.$$

Ne putem da ușor seama că această formulă este o tautologie. Ea este adevărată oricare ar fi simbolurile. Să facem, de exemplu: $x = \varphi$.

$$T\omega \quad P(\varphi) \equiv \sim \varphi(\varphi) \cdot \supset \cdot \varphi \neq P$$

Cu alte cuvinte, dacă avem echivalența:

$$P(\varphi) \equiv \sim \varphi(\varphi)$$

simbolul φ (variabil) nu poate deveni P. Dar tocmai astfel de echivalențe duc la paradoxele lui Russell, Grelling-Nelson etc. Matricea generală a acestor paradoxe este definiția

$$PR\, \varphi = \sim \varphi R \varphi \qquad \text{Def.}$$

unde R este o relație posibilă între simboluri. În astfel de definiții simbolul $\varphi \neq P$, prin condiția generală a definiției.

Prin aceasta paradoxele binecunoscute, formate cu negație, nu mai pot să se producă.

Formula $T\omega$ poate fi scrisă de o manieră mai generală astfel:

$$T\omega \quad xRy \equiv \sim xRz \cdot \supset \cdot z \neq y$$

Această tautologie este valabilă oricare ar fi valorile simbolurilor.

Deci, dacă se dă o definiție de forma

$$xRy = \sim xRz \qquad \text{Def.}$$

de unde rezultă echivalența generală

$$xRy \equiv \sim xRz$$

dacă vom ține seama de $T\omega$, avem, printr-un *modus ponens*, condiția $z \neq y$. Paradoxele bazate pe o definiție avînd forma generală

$$xRy = \sim xRz \qquad \text{Def.}$$

nu mai sînt posibile.

Deci:

Dacă se atașează, în mod explicit, la un sistem formal tautologia $T\omega$, paradoxele bazate pe definiția $xRy = \sim xRz$, sau pe o formă particulară a acestei definiții, nu se mai pot produce.

Am arătat în altă parte [28] că toate paradoxele care folosesc negația sînt bazate pe o definiție de această formă.

[28] În cartea noastră *Soluția paradoxelor logico-matematice*, București, 1966. A se vedea de asemenea studiul nostru *The Solution of Logico-Mathematical Paradoxes* („International Philosophical Quarterly", March, New York, 1969).

Jules Vuillemin a arătat, într-un excelent studiu, care este matricea comună a acestor antinomii, arătînd de asemenea înrudirea demonstraţiei lui Gödel cu cea utilizată în teorema lui Cantor şi cu numerotarea utilizată în antinomia lui Richard [29].

VII. ANALIZA PARADOXULUI LUI GÖDEL CU AJUTORUL FORMULEI $T\omega$

Definiţia lui Gödel, în paradoxul care-i poartă numele, a fost după cum am văzut:

$$n \in K = \overline{Bew}\,[R(n)\,;\,n]. \qquad \text{Def. (1)}$$

Numărul natural n aparţine clasei K, dacă pentru el nu este demonstrabilă formula $[R(n)\,;\,n]$.

Această definiţie ne conduce la echivalenţa generală:

$$n \in K \equiv \overline{Bew}\,[R(n)\,;\,n].$$

Definiţia (1) este aceea a paradoxului *izomorf-heteromorf,* care este mai general decît acela al lui Richard. Gödel a recunoscut analogia, dar nu identitatea paradoxului său cu acel al lui Richard, el nu cunoştea însă paradoxul nostru *izomorf-heteromorf*. În acest caz, teorema $T\omega$, cu simbolurile respective ale acestei probleme, devine

$$T\omega \quad n \in K = \overline{Bew}[R(n)\,;n] \cdot\supset\cdot [R(n)\,;n] \neq [R(q)\,;\,q].$$

Vedem că principiul contradicţiei nu atinge variabila n, ci expresia $[R(n)\,;\,n]$, care nu poate deveni chiar $[R(q)\,;\,q]$, căci atunci definiţia (1) ar fi inclus propoziţia contradictorie: „Dacă $q \in K$ este adevărată, adică dacă $[R(q)\,;\,q]$ este demonstrabilă, atunci $[R(q)\,;\,q]$ nu este demonstrabilă". Avem deci următorul *modus ponens :*

$$n \in K = \overline{Bew}\ [R(n)] \qquad (2)]$$

$$\frac{n \in K \equiv \overline{Bew}[R(n)\,;\,n] \cdot\supset\cdot [R(n)\,;\,n] \neq [R(q)\,;\,q]}{[R(n)\,;\,n] \neq [R(q)\,;\,q]}$$

Problema este mai generală şi, fără complicaţiile introduse de Gödel, ia forma următoare, care nu este decît una din formele paradoxelor noastre generale, *compatibil-incompatibil, izomorf-heteromorf* etc. Fiind dată o clasă de propoziţii K într-un formalism logic oarecare, necontradictoriu şi aritmetizat, vom putea totdeauna enunţa într-o oarecare manieră, dar bine definită, o problemă de genul următor: vom spune că o propoziţie p aparţine clasei K dacă pentru p nu este demonstrabilă afirmaţia că p aparţine unei alte clase ψ

[29] J. Vuillemin, *Sur les conditions qui permettent d'utiliser les matrices russelliennes des antinomies (1905) pour exprimer les théorèmes des limitations internes des formalismes* („Notre Dame Journal of Formal Logic", vol. VII, no. 1, January, 1966).

(care poate varia de o manieră bine definită, dar, pentru fiecare p, clasa ψ este dată). Această definiţie se scrie:

$$p \in K = \overline{Bew}\,(p \in \psi). \qquad \text{Def. (1)}$$

Echivalenţa corespunzătoare este valabilă pentru orice p:

$$p \in K \equiv \overline{Bew}\,(p \in \psi). \qquad (2)$$

Dar pentru că ψ este variabil, el poate deveni chiar K, astfel că definiţia ar fi inclus propoziţia pe care o obţinem din (2) pentru $\psi = K$:

$$p \in K \equiv \overline{Bew}\,(p \in K).$$

Cu alte cuvinte, dacă propoziţiunea „p aparţine clasei K" este adevărată, atunci propoziţiunea „p aparţine clasei K" nu este demonstrabilă, şi dacă propoziţiunea „p aparţine clasei K" este falsă, atunci este demonstrabilă propoziţiunea „p aparţine clasei K", ceea ce este contradictoriu. Vom scrie Tω cu simbolurile acestei probleme: echivalenţa (2) şi $T\omega$ ne dă un *modus ponens*.

$$p \in K \equiv \overline{Bew}\,(p \in \psi)$$

$$p \in K \equiv \overline{Bew}\,(p \in \psi) \cdot \supset \cdot \psi \neq K\,.$$

Paradoxul nu mai poate apărea. Simbolul ψ nu poate să reprezinte nici o clasă K, care poate să fie dată în formalismul logic considerat în modul indicat.

VIII. CONCLUZII

Am arătat că paradoxul lui Gödel este de tipul mai general construit de noi mai sus, paradoxul *izomorf-heteromorf*.

Vom insista încă asupra unui alt aspect al acestei probleme, care ne va explica într-un mod mai complet mecanismul acestui paradox.

Am găsit relaţia: $\psi \neq K$. Aceasta înseamnă: clasa K nu poate fi identică cu nici o valoare a simbolului ψ (variabil), definiţia sa nu poate decisă fie identică nici unei clase ψ şi deci expresia $\overline{Bew}\,(p \in \psi)$ nu este definisantă pentru clasa K (expresie care nu este formată decît cu clasa ψ, unul din membrii săi p, şi ideea că putem demonstra că un element p aparţine sau nu clasei ψ).

Să examinăm mai de aproape modul de formare a acestor feluri de clase. Sînt alese într-un mod arbitrar două clase şi se constată dacă ele au o relaţie sau nu. Dar aceste feluri de relaţii, cu toate că pot fi constatate într-un mod legitim, există prin *accident*.

Într-adevăr, să considerăm cadrul unde am construit paradoxul *izomorf-heteromorf*.

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_n.$$

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n.$$

Proprietatea numărului a_3, de exemplu, de a fi *izomorf* sau *heteromorf*, în raport cu numerotarea noastră relativă și arbitrară, nu are nimic esențial. Aceasta se vede mai bine din faptul că într-o altă ordine (pe care o putem alege arbitrar) același număr a_3 poate fi *izomorf* și într-o altă ordine *heteromorf*. Aceste proprietăți pot fi legitim constatate, adică se poate constata că un număr oarecare a_x are sau nu are proprietatea de același rang P_x, dar această coincidență, consecință a unei ordini arbitrar stabilită, nu este decît un accident. Faptul că predicatul P_x se găsește în același rang cu numărul a_x este un accident.

Logica tradițională a cunoscut bine aceste feluri de proprietăți. Accidentul este o proprietate care exprimă ceva care nu aparține conotației subiectului unei judecăți și nu poate fi dedus analitic din ideea subiectului. Dar toate tratatele de logică tradițională interzic ca o definiție să fie construită prin accident. Accidentul nu este definisant și expresiile ce exprimă proprietăți accidentale nu sînt definisante. În sistemele logico-formale se folosesc permanent astfel de expresii. Într-adevăr, logica simbolică, operînd cu simboluri vide de orice conținut, este obligată, în general, să privească relația de definiție fără nici o legătură între *definiens* și *definiendum*. Definițiile apar astfel ca simple abrevieri convenționale ale expresiilor simbolice, sau, după cum spune Russell, ca „simple comodități tipografice" *(typographical conveniences)*.

Vedem dar că așa-zisele predicate introduse de către noi în paradoxul *izomorf-heteromorf* sînt predicate definite prin accident, deci deloc definite. Să subliniem încă o dată că o astfel de proprietate poate fi constatată, dar nu este definisantă.

Același lucru se petrece în paradoxul lui Gödel. Într-adevăr, Gödel alege o ordine arbitrară R, și în acest cadru definește o clasă K, bazată exclusiv pe această ordine. Dar tocmai această idee este exprimată de către condiția găsită $\psi \neq K$; clasa K nu poate fi identică cu ψ semnifică clasa K nu este definită de ψ.

Jules Richard, construind paradoxul care-i poartă numele, a arătat, la timpul său, că nu există contradicție. Iată ce scrie el analizînd construcția paradoxului său [30]: „Să arătăm că această contradicție nu este decît aparentă. Să revenim la argumentele noastre. Grupul de litere G este unul dintre aceste aranjamente; el va exista în tabelul meu. Dar la locul pe care-l ocupă el nu are sens. Este vorba de mulțimea F, și aceasta nu este încă definită. Ar trebui deci s-o bifez. Grupul G nu are sens decît dacă mulțimea E este total definită și aceasta nu este definită printr-un număr infinit de cuvinte. *Nu există deci contradicție.*" În rezumat, părerea lui Richard este că această antinomie se produce datorită faptului că se consideră definită o mulțime (E), care nu este definită. Această soluție a fost apreciată de Poincaré ca fiind adevărata soluție a tuturor paradoxelor, și că se reduce în fond la a observa „că nu se poate defini mulțimea E prin mulțimea E ea însăși" [31]. Aceste feluri de definiții sînt numite de Poincaré „definiții nepredicative". Noi am atras atenția că astfel de definiții nu există, fiind făcute prin accident: accidentul poate fi constatat, dar nu este definisant.

30 J. Richard, *op. cit.*

31 H. Poincaré, *Science et méthode*, p. 206 (Paris, Ed. Flammarion, 1909).

Vom insista însă aici asupra unui alt punct al chestiunii în raport cu definiţiile făcute prin accident. Să examinăm mai de aproape predicatele introduse de Gödel în această problemă, anume predicatele *demonstrabil-nedemonstrabil*. Aceste predicate sînt de asemenea definite prin accident. Într-adevăr, Gödel alege o ordine arbitrară *R*, în care el defineşte predicatele *demonstrabil-nedemonstrabil*, adică exact cum au fost definite predicatele *izomorf-heteromorf*: prin accident. Acest caracter al predicatelor *demonstrabil-nedemonstrabil* poate fi mai bine observat într-un sistem logic formal ca *Principia Mathematica*. O propoziţie adevărată este o tautologie în logica lui Russell, adică ea este adevărată în ea însăşi. Demonstrarea unei tautologii este accesorie şi nu este necesară pentru a stabili adevărul său, tautologia fiind adevărată, independent de demonstraţia sa. Cum spune Wittgenstein [32], referindu-se chiar la ideea de demonstraţie: „Demonstraţia în logică este numai un mijloc auxiliar mecanic pentru a recunoaşte mai uşor tautologia acolo unde ea este complicată". Natural, această manieră de a arăta că propoziţiile sînt tautologii este absolut neesenţial pentru logică. Tocmai prin aceea că propoziţiile de unde începe demonstraţia trebuie să arate fără demonstraţie că ele sînt tautologii [33]. Astfel deci, predicatele *demonstrabil* şi *nedemonstrabil* nu sînt în mod esenţial legate de o propoziţie, ceea ce ar face altfel ca simplul său enunţ să conţină, ca predicat, fie predicatul *demonstrabil*, fie predicatul *indemonstrabil* (ca elemente esenţiale ale definiţiei sale) şi ceea ce ar face propoziţia adevărată sau falsă în ea însăşi, adică fără demonstraţie, ceea ce este contradictoriu.

Este de remarcat faptul că şi alţi logicieni s-au lovit de aceeaşi dificultate, căutînd o definiţie a demonstrabilităţii în raport cu adevărul unei propoziţii. Iată ce scrie Tarski în legătură cu aceasta: „Extensiunea celor două concepte considerate (adevăr şi demonstrabilitate) nu este identică; toate propoziţiile demonstrabile sînt fără îndoială — din punct de vedere al conţinutului lor — propoziţii adevărate, dar definiţia propoziţiei adevărate pe care noi o căutăm trebuie să cuprindă de asemenea propoziţiile care nu sînt demonstrabile". Şi el adaugă ceva mai departe: „Trebuie să luăm în considerare aici circumstanţa că — în opoziţie cu conceptul propoziţiei adevărate — conceptul propoziţiei demonstrabile în aplicarea unor ştiinţe deductive posedă un caracter pur fortuit" [34]. Vedem deci că predicatele *demonstrabil-nedemonstrabil* sînt legate accidental de propoziţiile sistemului *Principia Mathematica* (sau de sistemele înrudite) şi pentru aceasta se pot construi astfel de definiţii, ca aceea a lui Gödel, care conduce la un paradox, exact cum lucrurile se petrec în cadrul altor paradoxe.

Vor formula acum concluziile noastre după cum urmează:

1. Ordinea în care Gödel numerotează semnele sistemului este arbitrară. Deci orice expresie formată regulat în sistem, dar definită exclusiv de şirul arbitrar al numerelor atribuite simbolurilor din care ea este formată (avînd reflectare asupra ei însăşi) este definită prin accident.

2. Orice proprietate a unei astfel de expresii, care ar rezulta pentru ea

[32] L. Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus* (prop. 1262) (Londra, Paul Kegan, 1933).

[33] *Ibidem* (prop. 6126).

[34] A. Tarski, *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen*, p. 304.

numai din poziția sa relativă și arbitrar fixată în interiorul sistemului, prin șirul de numere ale acestor simboluri, este o proprietate accidentală. De exemplu, se poate defini clasa tuturor expresiilor sistemului ale cărui șiruri de numere întregi corespunzătoare conțin fiecare numărul 33; dar o astfel de proprietate, stabilită pe această particularitate, este o proprietate accidentală și ea nu poate fi definisantă, cum se știe, prin condițiile definiției logicii tradiționale.

3. Demonstrația unei expresii într-o teorie deductivă nu este o „proprietate" a acestei expresii; „demonstrabil" nu este un predicat care poate fi atribuit unei expresii *înaintea* demonstrării sale, examinînd numai structura sa; dacă acest lucru ar fi posibil, atunci o propoziție căreia îi putem atribui „predicatul" *demonstrabil*, înaintea demonstrării sale, ar fi demonstrată fără demonstrație, ceea ce este absurd. Dar demonstrarea unei expresii într-o teorie deductivă nu este un caracter izolat al acestei expresii. Demonstrația nu este o proprietate, ci o operație. Fiind date unele reguli, se stabilește o conexiune între o expresie și celelalte expresii deja admise în corpul teoriei. Demonstrația posedă astfel un caracter operațional constructiv. Goblot a exprimat această idee de mai demult în formula: *A demonstra este a construi.* Și mai înaintea lui, Kant a făcut o teorie complexă a caracterului constructiv al demonstrației (pentru a nu cita și alți logicieni care au avut aceeași concepție asupra naturii demonstrației). Aceasta este cauza pentru care „demonstrabil" nu poate fi atribuit unei expresii într-un mod izolat, ca predicat al acestei expresii, pentru că demonstrația sa nu depinde exclusiv de expresia considerată, ci, de asemenea, de toate expresiile teoriei care servesc demonstrația sa.

4. Expresiile al căror accident este constatat nu pot fi „decise" teoretic în sistemul în care ele sînt formate, întrucît nici o expresie nu poate fi definită exclusiv prin accident, care rămîne o constatare de fapt.

International Logic Review, vol. XIV, 1, Bologna, 1983.

Ipoteza lui Borel

În cunoscuta lui carte *Le Hasard* (1920), matematicianul francez Emile Borel a pus o problemă care a revenit deseori în discuțiile filosofice despre probabilități și hazard. Să considerăm, o dată cu cunoscutul probabilist, numărul caracterelor întrebuințate în scrierea franceză: litere de rînd, majuscule, semne de punctuație etc., și să presupunem că toate acestea ajung la numărul 100 (cu necesitate ele sînt mai puține). O carte de dimensiuni medii cuprinde mai puțin de un milion de caractere. Care este probabilitatea să obținem această carte, alegînd caracterele la întîmplare? Sau trăgîndu-le la sorți? Este evident că probabilitatea ca prima literă, pe care o luăm la întîmplare, să se nimerească tocmai prima literă din carte, este de $\frac{1}{100}$; tot astfel, probabilitatea ca a doua literă să fie chiar litera a doua din cartea dată este tot $\frac{1}{100}$; cum cele două elemente sînt independente, probabilitatea ca ele să se producă simultan este egală cu produsul probabilităților lor:

$$\frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = \left(\frac{1}{100}\right)^2$$

Repetind același raționament pentru a treia literă, a patra etc., și cum am presupus că, în total, cartea noastră ar avea un milion de litere, probabilitatea ca hazardul să producă exact cartea tipărită este:

$$\left(\frac{1}{100}\right)^{1\,000\,000} = 10^{-2\,000\,000}$$

Dacă în locul unei singure cărți am considera un milion de cărți (cîte presupunea Borel că ar fi putut să existe în vremea lui, număr cu mult depășit astăzi), atunci probabilitatea ca toate aceste cărți să fie obținute prin hazard este egală cu produsul unui milion de factori egali cu factorul de mai sus, ceea ce se scrie:

$$\left[\left(\frac{1}{100}\right)^{1\,000\,000}\right]^{1\,000\,000} = 10^{-2\,000\,000\,000\,000}$$

Acest număr este reprezentat de zero, virgulă, urmat de 2 000 000 000 000 de zerouri, după care urmează o cifră semnificativă, număr infim de mic,

dar diferit de zero. Calculul nu spune că este imposibil să obţinem prin hazard cele un milion de volume tipărite, ci, dimpotrivă, că este *posibil*, dar această posibilitate ca acest fapt să se realizeze este foarte mică.

Iată însă ce apropiere face Emile Borel între această probabilitate şi un fapt fizic bine cunoscut. Să considerăm că avem două recipiente *A* şi *B* cu acelaşi volum, umplute cu două gaze diferite, la aceeaşi presiune şi la aceeaşi temperatură. După legea lui Avogadro, fiecare dintre aceste recipiente de dimensiuni obişnuite conţine acelaşi număr de molecule, care este de ordinul de mărime 10^{23}, adică de mai multe mii de miliarde. Experienţa arată că ciocnirea neregulată a moleculelor face repede ca amestecul gazelor să fie omogen (dacă recipientele sînt legate între ele astfel ca gazele să poată comunica între ele), adică este practic imposibil să se deceleze în acest amestec o heterogeneitate specială. Din acest fapt experimental se conchide, independent de orice ipoteză teoretică asupra naturii ciocnirilor moleculare, că la sfîrşitul timpului destul de scurt, necesar difuziunii gazelor, fiecare din moleculele unuia din cele două gaze are aceeaşi probabilitate de a se regăsi în recipientul *A* sau în recipientul *B*. Se ştie însă din calculul probabilităţilor că, pentru 10^{23} partide din jocul „Cap sau pajură", *écart*-ul (abaterea faţă de calcul) este de 10^{11}, adică o sută de miliarde; există deci o şansă la 10 pentru ca la un moment dat recipientul *A* să conţină 10^{11} molecule mai mult decît recipientul *B* (şi invers). Dar acest număr corespunde fracţiunii 10^{11} din numărul total de molecule, adică a o suta miime de milionime. Aceasta este valoarea heterogeneităţii ce poate fi aşteptată într-un amestec de cîţiva litri de gaz la temperatura şi presiunea obişnuită. Este evident că o asemenea heterogeneitate este inaccesibilă măsurilor experimentale.

Ceea ce pare surprinzător este că acest număr este aproximativ acelaşi cu cel pe care l-am găsit pentru ca un milion de cărţi diferite să fie obţinute prin hazard şi care ar reprezenta, astfel, „o heterogeneitate" a caracterelor tipografice.

Să-l urmărim mai departe pe Emile Borel. Să presupunem că s-au dresat un milion de maimuţe ca să bată la întîmplare pe clapele unei maşini de scris, sub supravegherea unor maiştri neştiutori de carte. Aceste maimuţe dactilografe lucrează cu înverşunare zece ore pe zi la un milion de maşini de scris. Supraveghetorii ar strînge foile înnegrite de litere şi le-ar lega în volume. La sfîrşitul unui an, aceste volume ar cuprinde, în afară de foi fără nici un sens, şi copia exactă a cărţilor de orice natură şi din toate limbile consemnate în cele mai bogate biblioteci din lume. Dar aceasta este tocmai probabilitatea ca într-un moment foarte scurt să se producă în recipientul *A* un *écart* de ordinul unei sutimi de miimi de milionime în compoziţia amestecului gazos. A presupune că acest *écart*, produs în felul acesta, va subsista timp de cîteva secunde, revine la a admite că, în mai mulţi ani, armata de maimuţe dactilografe, de care am vorbit mai sus, lucrînd în aceleaşi condiţii, va produce în fiecare zi copia exactă a tuturor imprimatelor, cărţi şi jurnale, care vor apărea în ziua respectivă şi în săptămîna următoare pe toată suprafaţa globului. Este, încheie Borel sugestivele sale analize, mai simplu să spunem că astfel de *ecart*-uri improbabile sînt pur şi simplu imposibile. Totuşi, vom spune noi, calculele şi raţionamentele făcute au arătat că astfel de *écart*-uri sînt posibile, dar avînd o posibilitate infim de mică. Distanţa de la posibil la imposibil este însă infinită şi nu poate fi trecută decît dacă tot calculul va putea face această

săritură. Soluția propusă de Borel este de ordin practic, și din acest punct de vedere ea poate fi acceptată, deși nu are o valoare *teoretică*.

Ceea ce m-a frapat în construcția acestui argument — care nu este chiar atît de riguros cum apare la prima vedere — este că el a fost cunoscut încă din Antichitatea romană. Cicero îl expune în mod clar în *De natura deorum (Liber II, XXXVII)*. Iată ce spune filosoful latin: „Pot eu oare să văd fără surpriză pe un om convins că niște corpusculi solizi și insecabili, care ascultă de legile gravitației, ar da naștere, prin întîlnirea lor fortuită *(concussione fortuita)*, la o lume în care domnește o atît de frumoasă ordine"? „Cine admite posibilitatea acestei generări — scrie mai departe Cicero —, admite că cele 31 caractere ale alfabetului repetate în aur sau în orice materie, în exemplare nenumărate, ar putea, dacă le aruncăm la pămînt, să se aranjeze în așa fel încît să formeze un text foarte lizibil din *Annales* ale lui Ennius." Și textual: *quod nescio an ne in uno quidem versu possit tantum valere fortuna* — „mă îndoiesc foarte că hazardul ar putea să grupeze aceste caractere ca să formeze măcar un vers".

Atacul lui Cicero era îndreptat împotriva lui Epicur și adepților lui, care susțineau că atomii se mișcă la întîmplare și prin întîlnirea lor fortuită și dezordonată dau naștere la o lume perfectă *(mundum perfectum)* și la toate lucrurile, dintre care unele se nasc și altele pier. Dacă este așa, spune Cicero, atunci pentru ce nu ar putea să facă ei (atomii) din întîmplare un portic, un templu, o casă, un oraș? Aceste creații îi apar lui Cicero mai ușoare decît de a face o lume ordonată ca aceea în care trăim.

După cum se vede, argumentul întrebuințat de Cicero este, în esența lui, identic cu acela al lui Borel, emis cu aproape două mii de ani mai tîrziu.

Vom face numai două observații pe marginea acestor raționamente.

Prima noastră remarcă față de acest mod de a raționa este mai generală și constă din faptul că nu credem că este admisibil să se facă din ignoranță un caz-limită al cunoașterii, după cum imposibilitatea nu este un caz limită al posibilității. Distanța dintre zero și un număr oricît de mic, chiar acela reprezentat de probabilitatea ca maimuțele lui Borel să scrie prin hazard o carte anumită, este infinită, și putem insera între zero și acest număr un șir infinit de numere. Nimicul nu se desparte cantitativ de existent, ci este calitativ deosebit. La fel a ști și a nu ști nu sînt două poziții vecine, ci între ele se află o prăpastie. A fi posibil și a fi imposibil nu sînt cazuri-limită ale unei serii de posibilități mai slabe. Făcînd din imposibilitate o probabilitate extrem de mică, exprimată printr-un număr extrem de mic, am schimbat esențial *natura* imposibilului. Însuși exemplul examinat mai sus, și care acordă probabilitatea de $10^{-2\,000\,000\,000\,000}$ pentru ca faptul ca un milion de cărți diferite să fie scrise de maimuțele dactilografe, arată că totul se bazează pe un mod eronat de a pune problema. Într-adevăr, să spunem — exagerînd — că fiecare bătaie pe clapă s-ar efectua într-o secundă; cîte secunde ar trebui atunci ca cele un milion de cărți să fie bătute prin hazard? Este ușor de văzut că Universul întreg nu are o viață atît de lungă încît această întîmplare să se poată realiza. Dacă socotim că inițialul *Big-Bang*— marea explozie prin care s-ar fi produs galaxiile și toate corpurile cerești— ar fi avut loc, așa cum se presupune, acum vreo 12 sau 15 miliarde de ani, este evident că acest interval de timp, la care se vor adăuga alte multe miliarde de ani, cît va mai dura viața acestui Univers, nu este suficient pentru ca un

milion de cărţi să fie bătute la maşinile maimuţelor din întîmplare. Nu mai spun nimic despre durata perioadei cît pot „trăi" pe pămînt maimuţe dactilografe şi maiştri analfabeţi . . . Atunci ce am exprimat prin afirmaţia că maimuţele dactilografe pot, prin hazard, să dactilografieze un milion de volume diferite, numai că timpul pînă s-ar produce acest eveniment este extrem de lung? Afirmaţia aceasta nu are nici un sens, întrucît nu ţine seama de datele problemei, şi transformă imposibilul în posibil neverificabil.

O a doua observaţie pe care o facem în această problemă este de altă natură. Este vorba de neglijarea unui factor decisiv în toate problemele de acest fel. Într-adevăr, cînd spunem că există un milion de cărţi, un milion de maşini de scris şi un milion de maimuţe dresate să scrie la aceste maşini, spunem că există un factor inteligent, care a ajuns la un nivel superior, tehnic şi cultural şi care, astfel, a avut posibilitatea să organizeze această şedinţă de dactilografie. Cu alte cuvinte, fără factorul inteligent, în speţă omul epocii noastre, ipoteza nu poate fi formulată. Dar acest factor *sine qua non* nu apare nicăieri în problema pusă, sau în altele de aceeaşi natură, şi astfel calculele, după cum am văzut, conduc la concluzia ce transformă, printr-un joc de probabilităţi, imposibilul în posibil. Şi în cazul semnalat de Cicero ca imposibil, că dacă totul s-ar datora ciocnirii întîmplătoare a atomilor lui Epicur, atunci ei ar putea face un portic sau un oraş, factorul inteligent sau ordonator nu apare deloc. Ipoteza îi apărea marelui orator roman ca fiind imposibilă, în mod intuitiv, prin absurditatea concluziilor la care dădea loc, dar şi aici factorul inteligent, care fabrica oraşe şi portice, lipsea. El totuşi se gîndea la „ordinea din natură", care — dacă s-ar admite ipoteza epicureilor — s-ar datora unei întîmplări.

Astfel, sîntem obligaţi să conchidem că o ipoteză pusă orb, fără factorul care o gîndeşte, adică independent de inteligenţa ordonatoare şi creatoare, poate duce la concluzii inadmisibile, din cauză că li s-a răpit însăşi baza lor logică. Mă gîndesc că este foarte probabil că la acest lucru a făcut aluzie Aristotel, cînd a scris în *Metafizica* lui (I, 3, 984 b): „Cînd s-a ivit un om, Anaxagoras, care cel dintîi a spus că şi la vieţuitoare, şi în natură inteligenţa este cauza bunei întocmiri şi rînduieli, acela a apărut ca singurul om treaz faţă de înaintaşi".

Forum, 12, Bucureşti, 1983.

Structuri matematice

Secolul trecut a fost martorul apariției unor dificultăți surprinzătoare, ivite în domeniul celor mai exacte și mai sigure științe, matematicile. Construcția geometriilor neeuclidiene a pus în discuție noțiunea de axiomă și prin aceasta pe aceea de evidență științifică; ideea de derivată a pus problema funcțiilor continue și Cauchy a trebuit să facă o întreagă teorie a limitelor pentru a putea justifica derivarea unei funcții în anumite puncte; însăși noțiunea de demonstrație a fost pusă în joc ș.a.m.d. În fața unor asemenea aporii, matematicienii au fost obligați să-și pună o problemă mult mai generală, aceea a fundamentelor logice ale științei lor. Cercetările din a doua parte a secolului al XIX-lea au condus la concluzia că întreaga matematică are la bază aritmetica, și că, dacă se va reuși să se fundamenteze aritmetica, toate celelalte domenii matematice vor fi prin aceasta asigurate. Lucrările lui Dedekind și mai cu seamă ale lui Cantor au arătat că cea mai simplă noțiune pe care se bazează aritmetica este aceea de mulțime *(Menge)*. Un moment s-a crezut că o teorie a mulțimilor, bine constituită, va fi suficientă pentru fundamentarea matematicilor, și așa a și luat această teorie o amploare pe care, probabil, nici autorul ei nu a bănuit-o. Totuși, pe parcursul dezvoltării ei, această teorie a avut de întîmpinat o serie de dificultăți, cum sînt celebrele paradoxe cantoriene, așa că a trebuit să se apeleze la logică pentru a găsi o ieșire din impas, transformînd logica într-o teorie matematică. Începutul secolului nostru ne-a pus, astfel, în fața unei situații cu totul noi: pentru a asigura bazele matematicilor, ele trebuiau reduse la teoria mulțimilor și la logica matematică. În aceste condiții s-au dezvoltat trei direcții principale în rezolvarea problemei: 1. logicismul lui Frege-Russell, după care matematica putea fi derivată dintr-un sistem foarte general de simboluri numit logică, inclusiv teoria mulțimilor; 2. intuiționismul lui Brouwer-Heyting, care admitea că unele noțiuni matematice sînt intuite direct (cum ar fi aceea de număr natural) și că principiul logic al terțiului exclus are o aplicație limitată, numai în domeniul mulțimilor finite; 3. formalismul lui Hilbert, potrivit căruia întreaga matematică poate fi redusă la un joc de semne. Nu vom spune nimic despre dificultățile întîmpinate de fiecare din aceste concepții, dar ele au fost destul de grave, cum ar fi celebra Teoremă a lui Gödel, care a arătat că orice formalism este limitat.

Greutățile întîmpinate de matematicieni în fundamentarea propriei lor științe au făcut să apară noi idei, fără ca acelea vechi să fie abandonate, ci numai completate. Una din aceste idei este aceea de structură. S-a observat un lucru care a părut, la început, foarte curios: aceleași formule puteau să fie aplicate în domenii foarte diferite. De exemplu, în fizică, ecuațiile propagării luminii și acelea ale undelor electrice se prezentau ca fiind asemănătoare,

deși priveau fenomene deosebite, ceea ce a condus pe Maxwell să constituiască teoria electromagnetică a luminii. Și în matematicile pure s-au ivit asemenea „asemănări", adică relații formale extrem de generale, care nu depind de conținutul eventual al simbolurilor utilizate. Aceste relații au fost numite *structuri* și ele pot fi studiate cu ajutorul metodei axiomatice. În felul acesta, pe baza unor structuri care le stau la bază, matematicile nu se mai despart, în domeniile bine delimitate ale Algebrei, Analizei, Teoria numerelor, Geometrie etc., ci, după cum spune N. Bourbaki (în *Arhitectura matematicilor*, 1948), vedem acum că teoria numerelor se învecinează cu aceea a curbelor algebrice sau geometria euclidiană cu teoria ecuațiilor integrale. În modul acesta se pot găsi și determina principalele structuri matematice și cele derivate și se poate studia natura lor prin metoda axiomatică, ceea ce s-a și făcut, încercîndu-se și clasificarea lor.

Am făcut această introducere pentru a arăta că acum problema naturii matematicilor și fundamentelor lor logice nu se mai pune în mod simplu, prin reducerea lor la un sistem de semne, care pot la un moment dat să capete un conținut; problema a devenit mult mai complexă și implică probleme filosofice de deosebită importanță. Primul care a avut ideea de *structură matematică* a fost un gînditor francez, Albert Lautman, astăzi foarte apreciat și comentat. [1] Vom trece în revistă principalele sale idei.

Matematica și realitatea. Prima luare de poziție a lui Lautman apare în comunicarea pe care o face la „Congresul internațional de filosofie științifică" (Sorbonna, Paris, 1935). El examinează în expunerea lui concepția logicienilor din „Școala de la Viena", care considerau că singurul obiect al filosofiei științelor este studiul logic al limbajului în care ele se exprimă. Dar, pentru Lautman, sarcina esențială a filosofiei științelor este de a stabili o teorie coerentă a raporturilor dintre logică și real, a solidarității dintre domeniile realității și metodele de investigare. În ceea ce privește teoriile axiomatice ale formalismului, prezentarea lor nu este pentru el decît o chestiune de mai mare rigoare. Obiectul studiat, spune el, „nu este mulțimea propozițiilor derivate din axiome, ci entitățile organizate, structurate, complete, avînd, pentru a spune așa, o anatomie și o fiziologie proprii". Pentru Lautman, deci, ceea ce este important este sinteza condițiilor necesare, și nu analiza noțiunilor primitive. Scopul științei este de a căuta realul, altfel cădem în riscul de a nu avea decît „umbra unei științe".

Schemele de structură și de existență. Există două feluri, spune Lautman, de a recunoaște și de a descrie realitatea matematică. În primul rînd, în modul cum ea este sesizată și descrisă de noi. Pe de altă parte, sub influența lucrărilor lui Brunschvicg (*Les Etapes de la philosophie mathématique*, 1912), el afirmă că, fără a renunța la ajutorul adus de psihologie și de logică, trebuie să caracterizăm realul într-un mod intrinsec. Examinînd metodele întrebuințate în teoriile formalizate, el constată că acestea nu pot

[1] Albert Lautman s-a născut în 1908 și a murit în 1944, împușcat ca partizan de către ocupanții nemți. Fost elev al Școlii Normale Superioare, el și-a trecut doctoratul cu două teze: *Essai sur les notions de structure et d'existence* și *Essai sur l'unité des sciences mathématiques dans leur développement actuel*. Alte lucrări ale lui Lautman sînt: *Nouvelles recherches sur la structure dialectique des mathématiques; Symétrie et dissymétrie; Mathématiques et réalité; Considérations sur la logique mathématique*. Lucrările lui au fost reunite într-un volum purtînd titlul *Essai sur l'unité des mathématiques* (Paris, 1977), avînd trei prefețe, semnate de Costa de Beauregard, Jean Dieudonné și Maurice Loi.

avea o caracterizare intrinsecă, pentru că, pentru a le demonstra coerența, trebuie să facem apel la o *metamatematică*, care ia teoria dată drept obiect. Însă teoria matematică este, pentru Lautman, *un dat*, care conține o realitate matematică „ideală și autonomă". El arată că în orice teorie există o solidaritate organică, care împinge părțile să se organizeze într-un tot (ceea ce el numește „local" și „global"). Ideea sa principală este că părțile nu sînt legate într-un tot printr-o simplă juxtapunere, nu este vorba despre o simplă sumă a unor elemente; „întregul" matematic se compune din elemente definite în funcție de acest „tot". Această „solidaritate" a părților se exprimă într-o *structură*, sau într-o „schemă de structură". Filosofia matematică studiază aceste structuri și explică natura lor, raporturile lor reciproce. Numeroase exemple explicitează aceste idei.

Plecînd de la constatarea pe care o face, în legătură cu metafizica lui Descartes, în care găsește un demers dialectic, anume trecerea de la ideea de imperfecțiune la aceea de perfecțiune, Lautman regăsește o relație asemănătoare în unele teorii, adică necesitatea de referință la un model de perfecțiune — la un „absolut" — care este observabil în natura imperfectă a unor entități matematice. Se caută totdeauna să se șteargă impuritățile, în tendința către perfecțiune, ceea ce el numește *„la montée vers l'absolu"*.

O altă problemă abordată de autor în teza lui este următoarea: trecerea de la esență la existență. Aceasta este o temă veche, care a preocupat pe filosofii greci și mai ales pe scolastici, deși de pe alte poziții filosofice. După Lautman, structura unei entități matematice este esența ei, și această esență îi dă existență. Dar problema e mult mai complexă. Analiza cercetătorului francez îl conduce la concluzia că realitatea matematică nu se găsește la nivelul entităților matematice, ci la acela al teoriilor; la fel, realitatea fizică nu apare la nivelul experienței izolate, ci la nivelul unui sistem fizic. Esența („schema") dînd existență unei entități, devine ceea ce el numește „o schemă de geneză". Lautman concepe un domeniu de bază, de unde proced entitățile matematice, astfel că, de la un gen de entitate, sau de la o structură la alta, există o trecere imediată. Structura unei entități este, după el, inerentă unei alte entități care o primește. Prin urmare, schemele de structură, devenind scheme de geneză, sînt înțelese de Lautman ca o suită care urcă tot timpul către o structură mai comprehensivă, ceea ce el numește *„la montée des genèses"*. Această „urcare" îl conduce la o concluzie platoniciană sui generis: „Natura realului, structura și condițiile genezei lui nu sînt cognoscibile decît urcînd la Idei, ale căror legături sînt încarnate în știință".

Unitatea științelor matematice. Lautman pleacă în această problemă de la o lucrare a lui H. Weil (1928), în care acesta constata existența unei diviziuni esențiale în matematicile contemporane: o matematică „clasică", pornind de la noțiunea de număr întreg și ajungînd la analiză; și o matematică „modernă", care afirmă, dimpotrivă, primatul algebrei, adică al noțiunii de domeniu, în raport cu numerele atașate acestui domeniu. Acceptînd această teză, el arată, cu multe exemple, că distincția nu constituie, în definitiv, o opoziție ireductibilă, pentru că „este posibil să regăsim în teoriile moderne ale analizei punctele de vedere care caracterizează algebra". Dacă nu se poate nega o oarecare diferență între liniile de dezvoltare ale matematicilor din secolul trecut și acelea ale secolului nostru, această diferență trebuie concepută în același mod în care se poate opune fizica continuului aceleia a discontinuului. Fizica, la fel ca matematica contemporană, oferă multe exemple

cînd aceleași fapte pot fi studiate în două maniere diferite. Examinînd raporturile dintre discontinuu și continuu, dintre finit și infinit, autorul găsește două poziții clasice: continuul emană din discontinuu și infinitul din finit „printr-un fel de îmbogățire progresivă a finitului și a discontinuului"; a doua poziție afirmă prioritatea continuului și a infinitului, și atunci finitul și discontinuul nu ar fi decît „limitări ale infinitului și continuului". Ca exemple, el dă infinitul lui Descartes, care este „prim" în raport cu finitul, după cum continuitatea la Bergson este „primă" în raport cu discontinuul. Între aceste două atitudini se poate observa o a treia, aceea a multor matematicieni contemporani, care văd în finit și infinit nu doi termeni extremi, ci două genuri de entități distincte, dotate fiecare cu o structură proprie, raporturile lor fiind de imitație sau de expresie. Imitația semnifică pentru Lautman că structura infinitului imită pe aceea a finitului, expresia semnifică faptul că structura unui domeniu discontinuu sau finit „înfășoară" *(enveloppe)* existența unui alt domeniu continuu sau infinit, a cărui existență este expresia structurii primului. Între finit și infinit sau între continuu și discontinuu se pot face apropieri de imitație și de expresie, „adaptări" reciproce, bazate pe analogii structurale, de unde rezultă „unitatea matematicilor care este esențial aceea a schemelor logice, care prezidează la organizarea edificiului lor".

Dialectica matematicilor. Cercetările moderne ale fundamentelor matematicilor au dat o prioritate logicii (matematice). Lautman, după cum am văzut, este mai puțin preocupat de fundamentele matematicilor, cît mai ales caută să descopere demersul real al gîndirii matematice în funcția ei efectivă, creatoare. El văzuse deja în „ridicarea spre absolut" un fel de dialectică. Într-un memoriu din 1939, purtînd chiar titlul *Noi cercetări asupra structurii dialectice a matematicilor*, el vorbește deschis despre o dialectică de tip „platonician", conform căreia s-ar efectua procesele matematice. După cum se știe, Platon a deosebit o *dialectică ascendentă*, care se ridică către genuri din ce în ce mai comprehensive, și o *dialectică descendentă*, care coboară de la genuri superioare către cele inferioare. Lautman se sprijină pe aceste două dialectici, pe care le concepe ca o „descindere" a abstractului spre concret sau invers. Mai mult, el utilizează, de asemenea, unele distincțiuni ale filosofiei lui Martin Heidegger, „care par să convină în mod remarcabil problemei metafizice considerate". Ceea ce este important în lucrarea lui este că el arată, într-un mod efectiv, examinînd teorii matematice reale, mersul dialectic ascendent sau descendent către idei sau pornind de la idei. Se face astfel o apropiere între „metafizică" și „matematică", apropiere care, în concepția autorului, este necesară și nu contingentă. Ideile lui Platon nu sînt concepute de el ca „modele" ale căror copii ar fi entitățile matematice, ci ca scheme de structură, conform cărora s-ar organiza efectiv teoriile. El crede că acest sens ar fi sensul veritabil platonician al „ideilor". Dialectica ar exercita o oarecare dominație asupra teoriilor, în sensul că geneza unei teorii ar fi rezultatul unei analize a *Ideii*. Ea ar poseda astfel o *anterioritate* în raport cu matematicile, care nu este nici de natură cronologică, nici epistemologică, nici *a priori*, nici măcar de natură logică; această *anterioritate* este de natură *ontologică*, în sensul lui Heidegger, aceeași care există între o „intenție" și un „scop", adică între o orientare a gîndirii către un „scop" și realizarea acestui scop. Relațiile matematice s-ar raporta la astfel de relații între Idei, ideile constituind numai o problematică și teoriile rezultînd din necesitatea de a le înțelege. Ar exista deci „structuri ideale" ale dialecticii,

pe care matematicile le presupun în mod necesar spre a se putea realiza. Pentru a-și ilustra concepția sa, autorul analizează mai multe exemple. Printre ele, demonstrația transcendentă a lui Hecke a reciprocității a două ideale arată convergența a trei serii de fapte matematice: faptele de analiză (formulele de transformare ale funcțiilor theta); faptele de algebră (definiția diferenței unui corp); faptele de aritmetică (reciprocitatea cuadratică). Această convergență nu poate fi explicată, spune Lautman, decît prin participarea (în sensul dat de el concepției lui Platon) acestor teorii la o structură dialectică comună.

Simetrie și disimetrie. Concepția acestor opoziții dialectice, considerate ca angajate într-o complementaritate dialectică, l-a condus la Lautman la ideea de a analiza conceptele de simetrie și disimetrie în matematică și în fizică. Studiul său a fost publicat postum (1946), sub titlul *Simetrie și disimetrie în matematică și fizică.* El se referă la aceste idei din filosofia lui Kant, care a observat că diferența de orientare a figurilor simetrice în raport cu un plan din spațiul obișnuit este o intuiție sensibilă, ireductibilă la orice altă determinare conceptuală. Remarca lui Kant este regăsită de știința contemporană în diferite domenii, ceea ce dovedește că există o *simetrie disimetrică* atît în fizică, cît și în matematică. Lautman dă numeroase exemple pentru a ilustra acest fapt în fizica matematică, în cristalografie, în matematicile pure. Exemplele date de el în fizica matematică arată că distincția simetrie-antisimetrie servește ca fundament calităților sensibile ale materiei, „poate mai importante din punct de vedere filosofic chiar decît proprietățile de orientare". Opozițiile — cum ar fi finit-infinit, discret-continuu, local-global, algebră-analiză — sînt numai aparente, structura lor relevînd o înrudire mai ascunsă. În modul acesta el a pus în evidență o anumită simetrie și disimetrie a spațiului, ca manifestare a acelei dialectici concepute ca fiind la baza oricărei științe. Această idee a avut o confirmare neașteptată, de natură fizică, după cum remarcă O. Costa de Beauregard în *Avant-Propos* la studiul lui Lautman asupra simetriei și disimetriei. În 1956—1957, Lee și Yang au descoperit *non-invarianța* prin simetria spațiului a „interacțiunii slabe" și au sugerat (cum a făcut independent și Landau) că în acest domeniu „simetria fizică" implică în plus și simetria geometrică, schimbul particulă-antiparticulă sau materie-antimaterie. „Iată un magnific exemplu, scrie Costa de Beauregard, de antisimetrie în act, de geometrie care se încorporează în fizică."

Eforturile lui Lautman, în lucrările sale, au fost să descopere în cunoașterea realităților matematice un subplan filosofic, care-i dă o explicație mult mai profundă decît poate să i-o dea examenul pur logico-formal al fundamentelor ei. El însuși o spune, de altfel, în finalul „Introducerii" la tezele sale: „Matematicile, și mai cu seamă matematicile moderne, algebra, teoria grupurilor, topologia, ne-au părut astfel că povestesc, amestecate în construcțiile de care se interesează matematicienii, o altă istorie, mai ascunsă și făcută pentru filosof. O acțiune dialectică este jucată constant în fundalul acestor construcții." Dar bogăția și profunzimea ideilor sale filosofice i-ar fi cerut noi și lungi meditații, în contextul noilor achiziții ale științei, pentru a lua forma unei doctrine. Astăzi ideile sale sînt reluate și fructificate, întrucît ele îmbogățesc cu adevărat cunoașterea noastră despre cunoașterea matematică.

Forum, 2, București, 1984.

SEMNIFICAȚIA SIMBOLURILOR ÎNTREBUINȚATE

$\in$	Semnul de apartenență: $\alpha \in M$ înseamnă „α aparține lui M".
Df	Semnul de definiție.
p, q, r, ...	Variabile propoziționale susceptibile să ia două valori: adevărul și falsul.
$\sim$	Semnul de negație. Pus în fața unei litere sau unei expresii arată că valoarea de adevăr a acesteia este negată.
V	„Sau": $p \vee q$ însemnă sau propoziția p este adevărată, sau q este adevărată, sau amîndouă.
& sau punct	„Și": $p.\ q$ sau $p\ \&\ q$ înseamnă „p și q sînt adevărate amîndouă".
$\supset$	„Implicația": $p \supset q$ inseamnă că „relația dintre p și q exclude cazul cînd p este adevărat și q fals".
$f(x)$ sau fx	„Funcția propozițională": ea devine o propoziție îndată ce x și f sînt înlocuiți cu termeni determinați.
$\hat{x}(fx)$	Clasa determinată de funcția propozițională fx.
$\sim\hat{x}(fx)$	Clasa contrară clasei $\hat{x}(fx)$.
Cls sau *Cl*	Clasă.
Cl'	Clasa subclaselor clasei.
$\equiv$	Semnul de echivalență: $p \equiv q$ arată că propozițiile p și q sînt simultan adevărate sau simultan false.
$\vdash$	Semnul de aserțiune: $\vdash p$ arată că valoarea lui p este afirmată.